

复习: (第二章)

影响声速因素: 温、盐、深、可压缩性.

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.0168$$

盐度用千分数表示

海洋环境典型声速剖面图

- a. 混合层 (风对搅拌) 等温
- b. 温跃层 (温度随深度降低)
- c. 深海等温层

分贝的定义 (式中 I 表示声强, 即单位面积上的功率):

$$10 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

a. 声强计算公式: $I = p^2 / (\rho c)$, 单位为: W/m^2

b. 必须有参考声强

c. 参考的均方根声压为 1 微帕 ($1 \mu Pa$)

注意:

传播损失:

定义: 声场中某一点的声强 $I(r, \theta)$ 与距声源 1m 处的声强 I_0 之比:

$$TL = -10 \log \frac{I(r, \theta)}{I_0} = -20 \log \frac{|p(r, \theta)|}{|p_0|} \quad dB \text{ re } 1m$$

散射损失 = 几何扩展损失 + 衰减损失

a. 几何扩展损失 + ~~衰减损失~~

a. 球面扩展损失 $I \propto \frac{1}{4\pi R^2}$ $TL_{球} = 20 \lg R$

b. 柱面扩展损失 $I \propto \frac{1}{2\pi R D}$ (D : 厚度) $TL_{柱} = 10 \lg R$

在上下边界的波子. 点源在近场是球面扩展, 较远为柱面扩展

点源声场 100km, 最初 1km 球面扩展, 后期柱面扩展

衰减损失: a. 体积衰减 b. 海底反射 c. 海面、海底声吸收

斯涅耳定律: $\frac{\cos \theta}{c} = \text{const}$ ($\frac{\cos \theta_1}{c_1} = \frac{\cos \theta_2}{c_2}$)
声波同介质声速区弯曲

近场洛埃镜圆阵: $p(r, \theta) = -\frac{2i}{R} \sin(k z_s \sin \theta) e^{ikr}$

推导:

$p(r, \theta) = \frac{e^{ikr_1}}{R_1} - \frac{e^{ikr_2}}{R_2}$ (负号是满足海面压力释放边界条件 $p=0$)

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_s)^2}, R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_s)^2}$$

假设相对原点的距离 r 远大于声源深度 z_s , θ 表示倾角

R_1 可近似: $R - z_s \sin \theta$; R_2 可近似: $R + z_s \sin \theta$

进一步假定两次分母中的距离可简单地用斜距 R 代替

则 $p(r, \theta) \approx \frac{1}{R} [e^{ik(R - z_s \sin \theta)} - e^{ik(R + z_s \sin \theta)}]$

$$= \frac{e^{ikR}}{R} [e^{-ikz_s \sin \theta} - e^{ikz_s \sin \theta}]$$

用三角函数代替.

$$p(r, \theta) = -\frac{2i}{R} \sin(kz_s \sin \theta) e^{ikr}$$

幅度变化取如下简单形式:

$$|p| = \frac{2}{R} |\sin(kz_s \sin \theta)|$$

反射界面的存在造成了声压具有极大值和极小值的有问性图案

$$|p|_{\max} = \frac{2}{R} \text{ for } \sin \theta = (2m-1) \frac{\pi}{2kz_s}, m=1, 2, \dots$$

$$|p|_{\min} = 0 \text{ for } \sin \theta = (m-1) \frac{\pi}{kz_s}, m=1, 2, \dots$$

确定洛埃镜波束数 M :

$$(2M-1) \frac{\pi}{2kz_s} \leq 1$$

$$M = \text{int} \left\{ \frac{2z_s}{\lambda} + 0.5 \right\}$$

将 $\sin \theta = z_r / R$ (z_r : 给定深度) 代入.

$$|p| = \frac{2}{\sqrt{r^2 + z_r^2}} \left| \sin \frac{kz_s z_r}{\sqrt{r^2 + z_r^2}} \right|$$

当 $r \gg z_r$, 则 $\sin \theta \approx \theta$

$$|p| = \frac{2kz_s z_r}{r^2}$$

这表明声场最终变成单调衰减. 声压幅度衰减主比于 r^{-2}
相当于传播损失为: $TL = 40 \log r$ (是球面扩展损失的2倍, 是由于干涉效应引起的)

此时描述干涉传播损失与距离关系图中. 波束数 = 声场振荡结构
峰数. 数目. 远场衰减曲线主比于 $40 \log r$.

为使波动方程形式

自由空间中平面波的衰减系数:

$$\exp(ikx - \alpha x) = \exp[ikx(1 + i\delta)]$$

平面波衰减系数通常以分表示成每距离的损失, 即

$$\text{Loss} = -20 \log \frac{A}{A_0} \approx 8.686 \alpha x \Rightarrow \alpha' \approx 8.686 \alpha$$

甲: 水中衰减系数随频率变化表明:

1. 低频衰减小

小: 衰减

2. 尽管衰减随频率升高而增大, 但仍然比电磁波衰减

液体-液体界面

边界条件: 要求界面两边的声压和垂直质点速度在界面上 ($z=0$)

必须连续, 介质1中总声压为 $p_1 = p_i + p_r$, 在介质2中总声压为 p_2

所以上述边界条件在数学上就表示为:

$$\text{由欧拉运动方程: } \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$p_1 = p_2, \quad \frac{1}{i\omega\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{i\omega\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z}$$

↑
声压连续

↑
垂直质点速度连续

$$u = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\text{斯涅耳定律: } \frac{\cos \theta_1}{c_1} = \frac{\cos \theta_2}{c_2} \quad \text{or} \quad k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \theta_2$$

$$k_1 \equiv \omega/c_1, \quad k_2 \equiv \omega/c_2$$

$$\text{反射系数: } R = \frac{\rho_2 c_2 \sin \theta_2 - \rho_1 c_1 \sin \theta_1}{\rho_2 c_2 \sin \theta_2 + \rho_1 c_1 \sin \theta_1}$$

$$T = \frac{2 \rho_2 c_2 \sin \theta_2}{\rho_2 c_2 \sin \theta_2 + \rho_1 c_1 \sin \theta_1}$$

反射时 $R=1$ ，临界角为 $\theta_c = \arccos(\frac{c_1}{c_2})$

全透射时 $(R=0)$

任意分层:

$$R_{1n} = \frac{R_1 + R_m \exp(2i\phi_2)}{1 + R_1 R_m \exp(2i\phi_2)}$$

$$\phi_2 = k_2 z_2 \sin \theta_2 \quad (\theta_2: \text{透射角})$$

第二章:

波动势与位移关系:

$$u = \nabla \psi$$

波动势亥姆霍兹方程:

$$[\nabla^2 + k^2(r)] \psi(r, \omega) = f(r, \omega)$$

$$k(r) = \frac{\omega}{c(r)}$$

声源表达式:

$$\nabla^2 \psi - c^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(r, t)$$

均匀介质下方坐标系的解 (无源区)

(1) 平面波 (平面)

平面波: 直角坐标系

$$[\nabla^2 + k^2(r)] \psi(r, \omega) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} A e^{ikr} \\ B e^{-ikr} \end{cases}$$

2. 坐标系(柱面)

无限均匀线状声源产生的声场(其中源与z轴重合)

$$[\nabla^2 + k^2(r)] \psi(\vec{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

解为: $\psi(r) = \begin{cases} A J_0(kr) \\ B Y_0(kr) \end{cases}$

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr)]$$

(5) 坐标
 $U(\omega) = v$

(6) 定

汉克函数表

$$\psi(r) = \begin{cases} CH_0^{(1)}(kr) = C[J_0(kr) + iY_0(kr)] & \text{波函数} \\ DH_0^{(2)}(kr) = D[J_0(kr) - iY_0(kr)] & \text{波函数} \end{cases}$$

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}$$

$$H_0^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)}$$

波函数
柱面波

和

波函数

0.31

3. 坐标系(球面)

点源产生的声场

$$[\nabla^2 + k^2(r)] \psi(\vec{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} +$$

解为: $\psi(r) = \begin{cases} (A/r) e^{ikr} & \text{为散球面波} \\ (B/r) e^{-ikr} & \text{为聚的球面波} \end{cases}$

(1)

(5)

无界介质中的声源

① 点源为半径为a的小球

② 球面位移为 $U(r, a) = U(t)$, 变换到频域为 $U(r, a) = U(\omega)$

③ 求解波动方程, 要求 $\frac{\partial \psi}{\partial r} \big|_{r=a} = U(\omega)$

④ 只有出散的球面波, 则解为 $\psi(r) = A \frac{e^{ikr}}{r}$

⑤ 假设波为: $u(r) = A \cdot e^{ikr} \left(\frac{ika}{r} - \frac{1}{r^2} \right)$

$U(\omega) = u(r, \omega, a) = A e^{ika} \frac{ika-1}{a^2} \approx -\frac{A}{a^2}$

$\therefore A = -a^2 U(\omega)$

⑥ 定义声源强度 (声源在频率 ω 下多强的本领) 记为 S_ω :

$S_\omega = 4\pi a^2 U(\omega)$

$\psi(r) = -S_\omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$

无界介质中的声源 (格林函数引入)

① 波动方程的格林函数

$[\nabla^2 + k^2] g_\omega(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

② 其中称为格林函数

$g_\omega(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$

③ 因此上述点源解 ($\psi(r) = -S_\omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$) 可以看作是如下方程的解:

$[\nabla^2 + k^2] \psi(\omega, \vec{r}) = S_\omega \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

互易原理: $g_\omega(\vec{r}, \vec{r}_0) = g_\omega(\vec{r}_0, \vec{r})$

有界介质中的声源

① 介质体积为 V , 界面为 S , 边界条件 $\psi(s, t)$ 指定。声场由分布在 V 体积内的体积力产生, 位移势满足的方程为:

$$[\rho^2 + k^2] \psi(r) = f(r)$$

② 非齐次方程的解为齐次解和非齐次解叠加

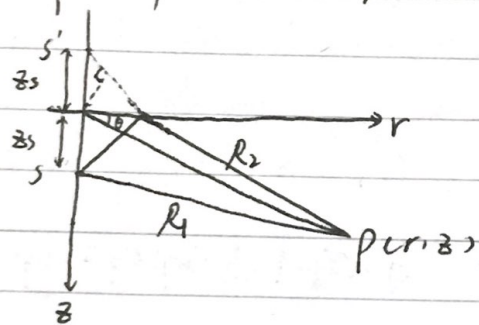
$$G_w(r, r_0) = g_w(r, r_0) + H_w(r)$$

非齐次解(特解) 齐次解

③ 齐次解对应的方程 $[\rho^2 + k^2] H_w(r) = 0$

$$p(r) = \rho \omega^2 \psi(r)$$

液体半空间中的点源



运用齐次解和特解:

分层介质
边界条件是

① 声压连续:

a. 轴向球

b. 圆柱

c. 圆柱

d. 无限长

∴ 声源在 y 轴

∴ 声源处于

∴ $[\frac{\partial^2}{\partial x^2} +$

应用 T

$f(x, z)$

$f(k, z)$

可得时解

$$[\frac{d^2}{dz^2} +$$

$$\psi(k)$$

$$G_w(k)$$

$$[\frac{d^2}{dz^2} +$$

$$H_w(k)$$

分层介质和波导

边界条件是：声压连续，速度连续

① 平面波问题

a. 直角坐标系

b. z轴与层界面垂直

c. y轴与波源平行 $\Rightarrow$ 平面波

d. 无增长波源与层界面

② 声源与y轴无关

波源处于 $(x, z) = (0, z)$ 位置

$$\therefore \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right] \psi(x, z) = S_0 \delta(x) \delta(z - z_0)$$

应用傅里叶变换：

$$f(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, z) e^{ik_x x} dk_x$$

$$f(k_x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) e^{-ik_x x} dx$$

可得时域/空域方程：

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_x^2) \right] \psi(k_x, z) = S_0 \frac{\delta(z - z_0)}{2\pi}$$

$$\psi(k_x, z) = -S_0 G_0(k_x, z, z_0)$$

$$G_0(k_x, z, z_0) = g_0(k_x, z, z_0) + H_0(k_x, z)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_x^2) \right] g_0(k_x, z, z_0) = -\frac{\delta(z - z_0)}{2\pi}$$

$H_0(k_x, z)$ 则是满足齐次波动方程

轴对称传播问题.

(
本

1. 单点源

a. 柱坐标系

b. z轴通过声源

c. r轴与界面平行

2. 汉克尔变换对

$$f(r, z) = \int_0^\infty f(kr, z) J_0(kr) kr dk$$

$$f(kr, z) = \int_0^\infty f(r, z) J_0(kr) r dr$$

3. 柱坐标系下的深度分离的波动方程

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_r^2) \right] \psi(kr, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(z - z_s)}{2z} dz$$

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr)]$$

$$H_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)}$$

$$H_0^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}$$

传播因子 (液体半空间中的点源)

$$\text{约是 } k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_r^2} & k_r \leq k \\ i\sqrt{k_r^2 - k^2} & k_r > k \end{cases}$$

$$\text{设齐次解为: } H_w(kr, z) = A^+(kr) e^{ik_z z} + A^-(kr) e^{-ik_z z}$$

$$\text{辐射条件: } H_w(kr, z) \sim \begin{cases} A^+(kr) e^{ik_z z}, & z \rightarrow +\infty \\ A^-(kr) e^{-ik_z z}, & z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{特解为: } g_w(kr, z, z_s) = A(kr) e^{ik_z |z - z_s|}$$

$$\text{求特解系数 } A(kr): \text{ 对 } \left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_r^2) \right] g_w(kr, z, z_s) = \frac{\delta(z - z_s)}{2z}$$

$$\text{两边积分, 积分域为 } z_1 \pm \epsilon, z_2 \pm \epsilon. \text{ 求得 } A(kr) = -\frac{1}{4\pi i k_z}$$

天线:

CP

MVD

天线间:

厄克利里斯波导:

a. 海水中: $\psi(kr, z) = S_0 \frac{e^{ik_{z,1}z - \alpha_1 r}}{4\pi k_{z,1}} + \rho_1^+(kr) e^{ik_{z,1}z} + \rho_1^-(kr) e^{-ik_{z,1}z}$

b. 海水中中角射线: $\psi_2(kr, z) = \rho_2^+(kr) e^{ik_{z,2}(z-D)}$

边界条件: 海面上表面声压释放, 海水与海底接触处位移连续, 声压连续

由行列式法求得解, 极点: $\tan(k_{z,1}D) = -\frac{\rho_2 k_{z,2}}{\rho_1 k_{z,1}}$
右式近似为零

上式(tan...) 存在复数解: 条件: $|k_z| < |k_r| < |k|$

近似模式: $\psi(r, z) \approx \frac{-i S_0}{2D} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(kr) \sin(k_{zm} z) \sin(k_{rm} r) H_0^{(1)}(k_{rm} r)$

衰减形式: $\psi(x, t) = \rho e^{-i(\omega t - kx) - \alpha x}, \alpha > 0$

$\psi(x, t) = \rho e^{i(\omega t - kx + i\alpha x)}$

$\alpha = -20 \log \left| \frac{\psi(x+\lambda, t)}{\psi(x, t)} \right| = -20 \log [e^{-\delta k \lambda}] = 40 \delta \log e \approx 5.45 \delta \lambda$

天线接收:

CRP: 最大似然估计: $\max_{\theta} \|a(\theta) y\|^2$

MVDR: 通过: $\min_{\theta} \|y - W H a(\theta)\|^2, \text{ s.t. } W^H a(\theta) = 1, \theta \text{ 为待求参数}$

天线间距与波数关系:

$e^{-j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta} (e^{-j\omega t})$

$\omega \in [-2, 2]$

$\therefore \begin{cases} \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_1 = \omega \\ \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_2 + 2\pi = \omega \end{cases}$ 连续条件: 即 $\frac{d}{\lambda} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 1$ 且 $\frac{d}{\lambda} \geq 1$

再次边界条件: $\psi(kr, 0) \equiv 0$.

$$\psi(kr, 0) = -S\omega [g_w(kr, 0, z_s) + H_w(kr, 0)] \quad ? \quad \text{若: } A^+(kr) = \frac{e^{ik_z z_s}}{4\pi i k_z}$$

$$\therefore \text{液体中空间解为: } \psi(kr, z) = S\omega \left[\frac{e^{ik_z(z-z_s)}}{4\pi i k_z} - \frac{e^{ik_z(z+z_s)}}{4\pi i k_z} \right]$$

$$\text{将分部积分: } e^{ik_z(z-z_s)} - e^{ik_z(z+z_s)} = 2i \sin k_z z_s (\sin k_z z - i \cos k_z z)$$

$$\text{相位: } k_z = \frac{(m-1)\pi}{z_s}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad \text{相位: } k_z = \frac{(2m+1)\pi}{2z_s}$$

理想液体波导:

1. 模型: (压力解放海面和海床)

积分变换法: $e^{ik_z(z-z_s)}$

$$\text{已知: } g_w = -\frac{1}{4\pi i k_z}$$

$$\text{设 } H_w = A^+(kr) e^{ik_z z} + A^-(kr) e^{-ik_z z}$$

边界条件 (上底和下底压力为0)

$$A^+(kr) + A^-(kr) = \frac{e^{ik_z z_s}}{4\pi i k_z}$$

$$A^+(kr) e^{ik_z D} + A^-(kr) e^{ik_z D} = \frac{e^{ik_z(D-z_s)}}{4\pi i k_z}$$

$$\psi(kr, z) = -\frac{S\omega}{4\pi} \begin{cases} \frac{\sin k_z z \sin k_z(D-z_s)}{k_z \sin k_z D} & z < z_s \\ \frac{\sin k_z z_s \sin k_z(D-z)}{k_z \sin k_z D} & z > z_s \end{cases}$$

$$\text{奇点: } k_z D = m\pi, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

$$kr = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{D}\right)^2}, \quad m=1, 2, \dots$$

$$\text{总波度: } \psi(r, z) = -\frac{i S \omega}{2D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_m z) \sin(k_m z_s) H_0^{(4)}(k_m r)$$

$$y = a(\theta)x + n; n \sim (\mathcal{N}(0, \sigma^2))$$

$$y \sim (\mathcal{N}(a(\theta)x, \sigma^2))$$

$$p(y; x, \theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} e^{-\frac{\|y - a(\theta)x\|^2}{\sigma^2}}$$

$$\max_{x, \theta} p(y; x, \theta) \Leftrightarrow \min_{x, \theta} \|y - a(\theta)x\|^2 \Leftrightarrow \max_{\theta} \|a^H(\theta)y\|^2$$

CR比MVDR差, 因为CR是单目标最优的处理式;

$$\text{求模式 } f_{om} = \frac{w_{om}}{22} = \frac{(m-0.5)G_{12}}{20\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}$$

$$M < \frac{2fD}{c} = \frac{kp}{2}$$