$$\psi = \underset{\Delta}{-} S_w G(r, r_0) \qquad g(r, r_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$$

$$S_w = \underset{\Delta}{-} \frac{4\pi}{\rho w^2} \qquad g_w(k_r, z, z_s) = \underset{\Delta}{-} \frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi i k_z}$$

$$p(r) = \rho w^2 \psi(w, r)$$

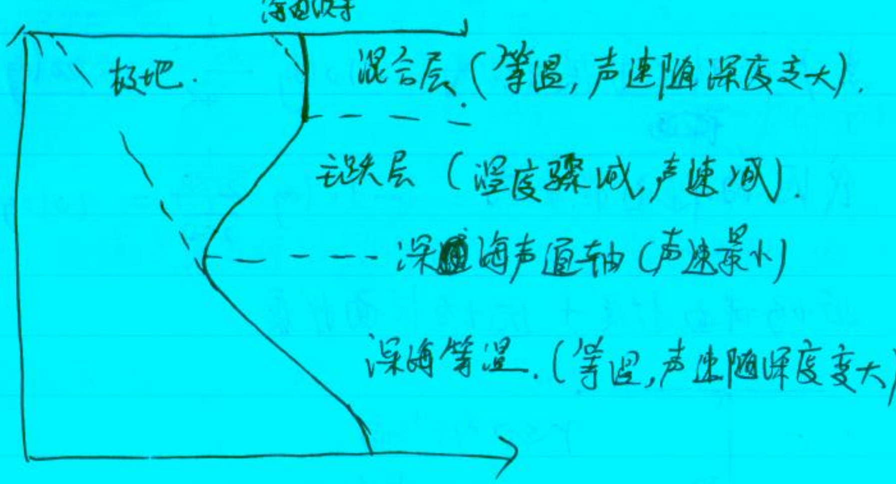
$$[\nabla^2 + k^2]\, g_w(r, r_0) = -\delta(r - r_0)$$

$$[\nabla^2 + k^2]\, \psi(w, r) = S_w \delta(r - r_0)$$

$$[\nabla^2 + k^2]\, G(r, r_0] = -\delta(r - r_0)$$

欧晨煊
2018/11/20

$\boxed{\text{声速:}}$ $C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z.$



$\boxed{\text{声强与分贝.}}$

声强: $10\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$ dB　　$I_2 = \cancel{10\ pa}$ $0.67\times10^{-18}\ W/m^2$

声压: $20\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ dB　　$p_2 = 10^{-6}\ pa$

$I = \frac{p^2}{\rho c}$　　海水 $\rho c = 1.5\times10^6$

$1\ dyn/cm^2 = 0.1\ pa$

$\Rightarrow 0.0002\ dyn/cm^2 = 2\times10^{-5}\ N/m^2 = 20\ \mu pa$

空气中	水中
dB re $20\mu pa$	dB re $1\mu pa$
$\rho c = 438.6\ kg/m^2 s$	$\rho c = 1.5\times10^6\ kg/m^2 s$
$I_{ref} = \frac{p^2}{\rho c}$	$I_{ref} = \frac{p^2}{\rho c}$

单位面功率. $P_{ref} = I \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \frac{p^2}{\rho c} = 4\pi I_{ref}$ $\left(dB = 10\log\frac{P_1}{P_{ref}}\right)$

传播损失

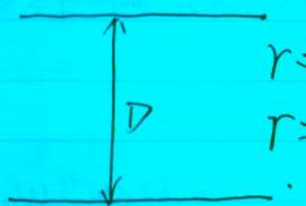
$$TL = -10\log\frac{I(r,z)}{I_0}$$ （I_0为距声源1m的声强）

$$= -20\log\frac{|p(r,z)|}{|p_0|}$$ （p_0为距声源1m的声压）

点源的球面扩展损失为 $-10\log\frac{\frac{1}{4\pi r^2}}{\frac{1}{4\pi}} = 20\log r$.

线源的柱面损失为 $-10\log\frac{\frac{1}{2\pi r D}}{\frac{1}{2\pi D}} = 10\log r$.

近场球面扩展 + 远场柱面扩展.



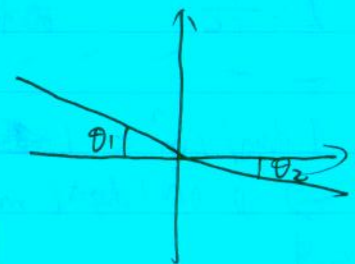
$r<D$为球面

$r>>D$为柱面

100km传播，先1km用球面扩展等于60dB，接着1km到100km为20dB，相加为80dB.

斯涅尔定律

$$\frac{\cos\theta}{c} = const$$



海面波导（最小声速在海面 — RSR）

深海声道轴传播（最小声速在轴上 — RR）

海底反射声线（最小声速在海底 — RBR）

海面海底反射（损耗最大，有会聚区 — SRBR）.

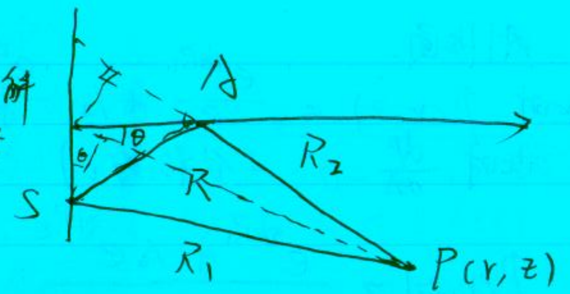
洛埃镜

1. 压力释放面.

特解　　齐次解

$$p(r,z) = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{e^{ikR_2}}{R_2}$$

（省去时间项 $e^{-i\omega t}$）



$R_1 = \sqrt{r^2+(z-z_s)^2}$　　$R_2 = \sqrt{r^2+(z+z_s)^2}$

负号是满足压力释放面条件（$p=0$），声源也归一化.

假定 $R >> z_s$，$R_1 = R - z_s\sin\theta$

$R_2 = R + z_s\sin\theta$

$$\therefore p \approx \frac{e^{ik(R-z_s\sin\theta)} - e^{ik(R+z_s\sin\theta)}}{R}$$

$$= \frac{e^{ikR}}{R}(2i\sin(kz_s\sin\theta))$$

$$|p| = \frac{2}{R}\sin(kz_s\sin\theta).$$

$\therefore |p|_{max} = \frac{2}{R}$　　$kz_s\sin\theta = \frac{2m-1}{2}\pi$

$|p|_{min} = 0$　　$kz_s\sin\theta = (m-1)\pi$.

因于 $(2m-1)\frac{\pi}{2kz_s} \leq 1$ （比p_{min}更先到达1）

$\Rightarrow M = int\{\frac{2z_s}{\lambda} + \frac{1}{2}\}$

把 $\sin\theta = z_r/R$ 代入得 $|p| = \frac{2}{\sqrt{r^2+z_r^2}}\left|\sin\frac{kz_sz_r}{\sqrt{r^2+z_r^2}}\right|$

远距离

$\sim \frac{2kz_sz_r}{r^2} \Rightarrow$ 声压以$\frac{1}{r^2}$衰减 $\rightarrow TL = 40\log r$.

2、刚性面.

此时 $p(r,z) = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + A' \frac{e^{ikR_2}}{R_2}$.

此时 $\frac{dp}{dz}=0$. (位移为0)

$$p(r,z) \approx \frac{e^{ikR_1}+A'e^{ikR_2}}{R}$$

$$= \frac{e^{ik(R-z_s\frac{z}{R})}+A'e^{ik(R+z_s\frac{z}{R})}}{R}.$$

$\Rightarrow A'=1. \Rightarrow p(r,z) = \frac{e^{ikR_1}}{R_1}+\frac{e^{ikR_2}}{R_2}$.

同理 $p(r,z) = \frac{2}{R}\cos kz_s\sin\theta \cdot e^{ikR}$.

$\therefore |p(r,z)| = \frac{2}{R}|\cos kz_s \sin\theta|$.

∴最大为 $\frac{2}{R}$ 为 $kz_s\sin\theta = (m-1)\pi$ $m=1,2,3\ldots$

最小为 0 为 $kz_s\sin\theta = (\frac{2m-1}{2})\pi$.

同样求得 $m_{max} = int[\frac{2z_s}{\lambda}+\frac{1}{2}]$

这时的传播损失.

$$|p| = \frac{2}{\sqrt{r^2+z_r^2}}\left|\cos\frac{kz_sz_r}{\sqrt{r^2+z_r^2}}\right|$$

当 $r \gg z_r$, $\cos\theta\to1$, $|p|\to\frac{2}{r}$

$\therefore T_L = 20\log r$

衰减 $\frac{dA}{dx} = -\alpha A \Rightarrow A = A_0\exp(-\alpha x)$.

自由空间中平面波衰减系数.

$\exp(ikx-\alpha x) = \exp[ikx(1+i\delta)]$

传输损耗(α'单位为dB/m): (α'单位为dB/m)

$Loss = -20\log\frac{A}{A_0} \approx 8.686\alpha x \Rightarrow \alpha' = 8.686\alpha$.

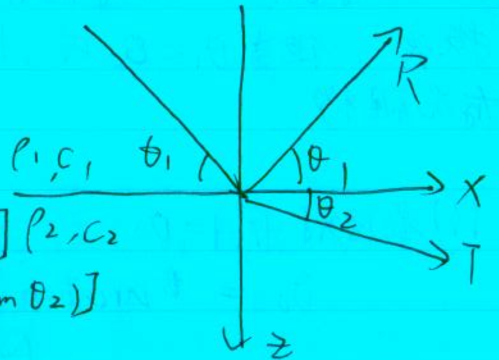
海水衰减系数随频率变化:

$$\alpha' \approx 3.3\times10^{-3} + \frac{0.11f^2}{1+f^2} + \frac{44f^2}{4100+f^2} + 3\times10^{-4}f^2$$

i) 低频衰减小.

ii) 比电磁波衰减小很多.

界面.



$p_i = \exp[ik_1(x\cos\theta_1 + z\sin\theta_1)]$

$p_r = R\exp[ik_1(x\cos\theta_1 - z\sin\theta_1)]$

$p_t = T\exp[ik_2(x\cos\theta_2 + z\sin\theta_2)]$

边界条件

i) 声压连续

$p_1 = p_i+p_r$ $p_2 = p_t$ $\Rightarrow$ $p_1=p_2$

ii) 垂直质点速度连续

$\frac{\partial p_1}{\partial z}\cdot\frac{1}{i\omega\rho_1} = \frac{\partial p_2}{\partial z}\cdot\frac{1}{i\omega\rho_2}$ ($p(r) = \rho\omega^2\psi(\omega,r)$)

$\Rightarrow k_1\cos\theta_1 = k_2\cos\theta_2$

$\frac{\omega}{c_1}\cos\theta_1 = \frac{\omega}{c_2}\cos\theta_2 \Rightarrow \frac{\cos\theta_1}{c_1} = \frac{\cos\theta_2}{c_2}$

$$Z_i \equiv \frac{\rho_i c_i}{\sin\theta_i}$$ （声压与垂直质点速度比

$$R=\frac{\rho_2c_2/\sin\theta_2-\rho_1c_1/\sin\theta_1}{\rho_2c_2/\sin\theta_2+\rho_1c_1/\sin\theta_1}=\frac{z_2-z_1}{z_2+z_1}$$ $\sin\theta_2$ 纯虚

$$T=\frac{2\rho_2c_2/\sin\theta_2}{\rho_2c_2/\sin\theta_2+\rho_1c_1/\sin\theta_1}$$ $(1+R=T)$ 水平分量.

i) $R=1$时理想反射 $\frac{\cos\theta}{c_1}=\frac{1}{c_2}$

$\therefore \theta_c=\arccos\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$

由式子可看出$\theta_1>\theta_c$时反射系数为实数即 $|R|<1$ 存在损失，但当$\theta_1<\theta_c$时，$|R|=1$所以是理想反射，但存在相移

ii) 全透射 $|R|=0$.

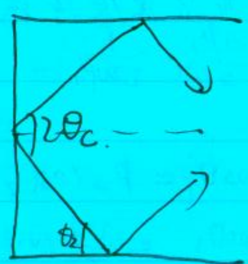
$$\theta_0=\arctan\sqrt{\frac{1-(c_2/c_1)^2}{[(\rho_2c_2)/(\rho_1c_1)]^2-1}}$$

$\Longrightarrow \rho_2c_2>\rho_1c_1$

存在 $c_2<c_1$, $\rho_2c_2>\rho_1c_1$ 泥浆海底.
(临界).

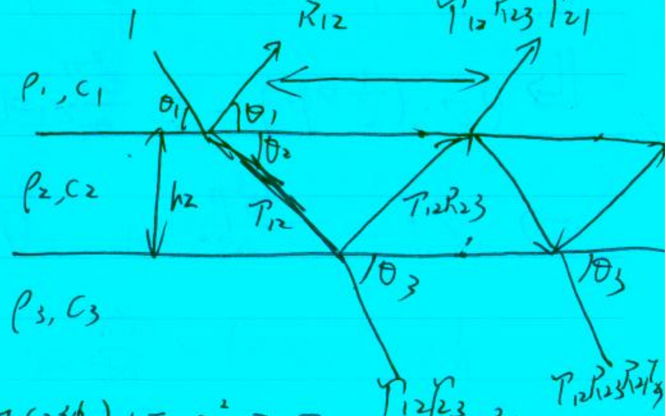
$|\theta|<\theta_c$：离散谱，是简正波场（全反射）.

$|\theta|>\theta_c$：连续谱，是近场.



液体—固体界面
边界条件

分层空间
存在相移 2φ
$\varphi=k_2h_2\sin\theta_2$



$$\therefore R=R_{12}+T_{12}R_{23}T_{21}\exp(2i\varphi_2)+T_{12}R_{23}^2R_{21}T_{21}\exp(4i\varphi_2)+\cdots$$
$$=R_{12}+T_{12}R_{23}T_{21}\exp(2i\varphi_2)\sum_{n=0}^{\infty}[R_{23}R_{21}\exp(2i\varphi_2)]^n$$
$$R=\frac{R_{12}+R_{23}\exp(2i\varphi)}{1+R_{12}R_{23}\exp(2i\varphi)}.$$

什么分层（递推）.

① 四分之一波长隔层 $h_2=\frac{2m-1}{4}\lambda_2$ 反射系数

$R=\frac{z_2^2-z_1z_3}{z_2^2+z_1z_3}$ 只要 $z_2=\sqrt{z_1\cdot z_3}\Rightarrow R=0$（无反射）只需隔$\frac{\lambda}{4}$且阻抗为平均值.

散射产生的非相干场 称为混响.

② 半波长隔层. $h_2=\frac{m\lambda_2}{2}$

$R=\frac{z_3-z_1}{z_3+z_1}$（仿佛隔层不存在）

当 $h_2\ll\lambda_2$ 也能得这一结果

波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla\cdot v & \text{质量守恒} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p'(\rho) & \text{牛二} \\ p' = \rho' c^2 \end{cases}$$

$(p = p_0 + p' \Rightarrow \nabla p = \nabla p')$

$$\rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

$$\Rightarrow \nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad \text{(声压)}.$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla(\rho c^2 \nabla\cdot v) - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(速度方程)}.$$

引入速度势. $v = \nabla\phi$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(用于变速但恒定密度)}.$$

$$\frac{p}{v_x} = \rho_0 c \quad \text{(速度与声压的阻抗关系)}.$$

引入位移势 $u = \nabla\psi$

$$\therefore \nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{(恒定密度)}$$

$$\Rightarrow p = -K\nabla^2\psi.$$

亥姆霍兹方程.

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(r,t).$$

→转动频域上.（由于微分算子系数与时间无关）

$$[\nabla^2 + k^2(r)]\psi(r,w) = f(r,w)$$

$$k(r) = \frac{w}{c(r)}$$

$\xrightarrow{\text{齐次项}} [\nabla^2 + k^2(r)]\psi(r,w) = f(r,w).$

均匀介质（省去时间关系 e^{-iwt}）

平面波传播 ⟶ 直角坐标系.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

平面波解 $\psi(x,y,z) = \begin{cases} Ae^{ikr} \\ Be^{-ikr} \end{cases} \xrightarrow{\text{单一方向}} \begin{cases} Ae^{ikx} \\ Be^{-ikx} \end{cases}$

无线均匀线声源 ⟶ 柱坐标系 $r(r,\varphi,z)$.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对于声场只随 r 变化，变为贝塞尔方程.

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + k^2\right]\psi(r) = 0.$$

解为 $\psi(r) = \begin{cases} AJ_0(kr) \\ BY_0(kr) \end{cases}$

用汉克尔函数表示.

$$\psi(r) = \begin{cases} CH_0^{(1)}(kr) = C[J_0(kr) + iY_0(kr)] \\ DH_0^{(2)}(kr) = D[J_0(kr) - iY_0(kr)] \end{cases}$$

$r\to\infty$ 时 $\begin{cases} H_0^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\frac{\pi}{4})} \\ H_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{-i(kr-\frac{\pi}{4})} \end{cases}$

全向源——球坐标系

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+k^2\right]\varphi(r)=0$$

∴解为 $\varphi(r)=\begin{cases}\frac{A}{r}e^{ikr}\\ \frac{B}{r}e^{-ikr}\end{cases}$

$\boxed{\text{格林函数}}$ (格子). 是非齐次亥姆霍兹解.

现在于特解.

声场于半径为a小球产生.

$u_r(t,a)=U(t)$ 球面位移.

声场全向的，径向位移为 $u_r=\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r}$ (φ 满足齐次方程).

边界条件为 $u_r(a)=U(\omega)$ (傅立叶变换).

由前面知道球全向源中无会聚波时

$$\varphi(r)=A\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\therefore u_r(r)=Ae^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)$$

由于简单点源球半径远小于声波波长，$ka\ll1$

$$u_r(\omega,a)=Ae^{ika}\frac{ika-1}{a^2}\approx-\frac{A}{a^2}$$

$$\therefore A=-a^2u_r(\omega,a)=-a^2U(\omega).$$

定义声源强度 $S_\omega=4\pi a^2U(\omega)$ 为体积注入幅度.

$$\therefore \varphi(r)=-S_\omega\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

其中 $g_\omega(r,0)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=\frac{\varphi(r)}{-S_\omega}$

格林函数.

$$g_\omega(r,r_0)=\frac{e^{ikR}}{4\pi R},\quad R=|r-r_0|$$

满足 $[\nabla^2+k^2]g_\omega(r,r_0)=-\delta(r-r_0)$ 点源.

$$\Longrightarrow [\nabla^2+k^2]\varphi(\omega,r)=S_\omega\delta(r-r_0).$$

$\boxed{\text{有界介质}}$

在边值问题下，需要

$[\nabla^2+k^2]g_\omega(r,r_0)=-\delta(r-r_0)$ 通解.

通解为特解 (如 $g_\omega(r,r_0)$) 与齐次解 $H_\omega(r)$ 之和.

广义格林函数. $G_\omega(r,r_0)=g_\omega(r,r_0)+H_\omega(r)$.

其中 $[\nabla^2+k^2]H_\omega(r)=0$

$$\Longrightarrow [\nabla^2+k^2]G_\omega(r,r_0)=-\delta(r-r_0).$$

格林定理

$$\Longrightarrow \varphi(r)=\int_S\left[G_\omega(r,r_0)\frac{\partial\varphi(r_0)}{\partial n_0}-\varphi(r_0)\frac{\partial G_\omega(r,r_0)}{\partial n_0}\right]dS_0-\int_V f(r_0)G_\omega(r,r_0)\,dV_0$$

可以选齐次解使格林函数在边界上为0，来消去面积分中的一半核函数

半空间中

$\varphi(r_0)\equiv0,\quad r_0=(x,y,0)$

代入格林定理消去面积分后面一项

$$\varphi(r)=\int_S G_\omega(r,r_0)\frac{\partial\varphi(r_0)}{\partial n_0}dS_0-\int_V f(r_0)G_\omega(r,r_0)\,dV_0$$

再选广义格林函数在 $r_0=(x,y,0)$ 处 $G_\omega(r,r_0)\equiv0$

方程为 $\varphi(r)=-S_\omega G_\omega(r,r_0)$ $\quad (f(r_0)=S_\omega\delta(r_0-r))$

可以直接令 $G_\omega(r,r_0)=g_\omega(r,r_0)+H_\omega(r)=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}-\frac{e^{ikR'}}{4\pi R'}$

流体半空间中的点源 ①

i) $p(r) = \rho w^2 \psi(r)$.

所以压力释放面为

$\psi(r_0) \equiv 0 \quad r_0 = (x, y, 0)$.

这时格林函数简化为

$\psi(r) = \int_S G_w(r, r_0) \frac{\partial \psi(r_0)}{\partial n_0} dS_0 - \int_V f(r_0) G_w(r, r_0) dV_0$

又 $\because f(r_0) = S_w \delta(r_0 - r)$

广义格林函数在 $r_0 = (x, y, 0)$ 处有 $G_w(r, r_0) \equiv 0$

$\Rightarrow \psi(r) = -S_w G(r, r_0)$

$\Rightarrow$ 直接猜 $G_w(r, r_0) = g_w(r, r_0) + H_w(r)$

$= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} - \frac{e^{ikR'}}{4\pi R'}$ (还是用齐次解+特解方法好)

$\psi(r) = -S_w \left[\frac{e^{ikR}}{4\pi R} - \frac{e^{ikR'}}{4\pi R'}\right]$

$p(r) = \rho w^2 \psi(w, r)$

讨论. $-S_w \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \xrightarrow[\text{归一化}]{S_w = -\frac{4\pi}{\rho w^2}} \frac{e^{ikR}}{R} = p(r)$

高频声源所需的体积流入幅度比低频声源小.

辐射条件:

$R\left[\frac{\partial}{\partial R} - ik\right]\psi(r_0) \to 0$

$R = |r - r_0| \to \infty$

先只研究 x, z 平面

平面传播

$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z)\right]\psi(x, z) = S_w \delta(x)\delta(r - r_0)$.

变换

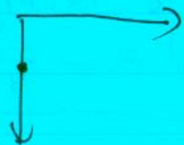
$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_x^2)\right]\psi(k_x, z) = S_w \frac{\delta(z - z_0)}{2\pi}$

$\psi(k_x, z) = -S_w G_w(k_x, z, z_s)$

又 $\because G_w(k_x, z, z_s) = g_w(k_x, z, z_s) + H_w(k_x, z)$

$\left[\frac{d}{dz^2} + k^2 - k_x^2\right] g_w(k_x, z, z_s) = -\frac{\delta(z - z_s)}{2\pi}$

思想为齐次解与特解叠加代入边界求齐次解 $H_w(k_x, z)$



轴对称传播.

采用柱坐标系、

用汉克尔变换得

$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_x^2)\right]\psi(k_x, z) = S_w \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi}$

相似所以方程的解既是线源声场逆变换核函数,

也是点源声场逆变换核函数.

柱面与直角

① 变换不同

② 坐标系不同

③ 源函数不同

液体半空间点源 ②.

齐次解 $H_w(k_r,z)=A^+(k_r)e^{ik_z z}+A^-(k_r)e^{-ik_z\cdot z}$.

$k_z=\sqrt{k^2-k_r^2}$　　(向下传)　　(向上传)

$z\to+\infty$ 时　$H_w(k_r,z)=A^+(k_r)e^{ik_z z}$

$z\to-\infty$ 时　$H_w(k_r,z)=A^-(k_r)e^{-ik_z\cdot z}$.

自由场格林函数为(特解)

$$g_w(k_r,z,z_s)=A(k_r)\begin{cases}e^{ik_z(z-z_s)} & z>z_s\\ e^{-ik_z(z-z_s)} & z<z_s\end{cases}$$

$$=A(k_r)e^{ik_z|z-z_s|}$$

由亥姆霍兹方程积分得　$A(k_r)=-\frac{1}{4\pi ik_z}$.

∴ $g_w(k_r,z,z_s)=-\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi ik_z}$　$\left(g_w(r,r_0)=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\right)$

当 $k_r=k$ 时存在一个极点

$k_r<k$ 时为辐射谱，不同接收器深度上 g_w 幅度一致，

$k_r>k$ 时为渐消谱，离源越深的渐消程度越大.

水平方向(r) 柱面波.

垂直方向(z) 平面波或渐消波.

由于 $z\to+\infty\Rightarrow H_w(k_r,z)=A^+(k_r)e^{ik_z z}$

∴ $\psi(k_r,0)=-S_w[g_w(k_r,0,z_s)+H_w(k_r,0)]$

$\Rightarrow S_w\left[-\frac{e^{ik_z z_s}}{4\pi ik_z}-A^+(k_r)\right]=0$

∴ 得到 $\psi(k_r,z)=S_w\left[-\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi ik_z}-\frac{e^{ik_z(z+z_s)}}{4\pi ik_z}\right]$

同理在 $z=z_s+0.1\lambda$ 与 $z_s+2\lambda$ 处放接收器，得到

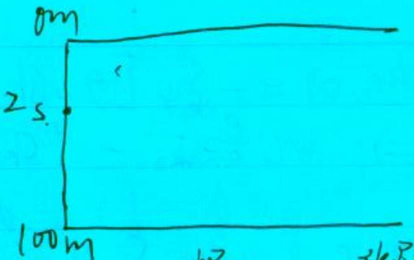
$k_z=\frac{(m-1)\pi}{z_s}$ 时格林函数为0.

当 $k_z=\frac{(2m-1)\pi}{2z_s}$ 时格林函数最大 $\Rightarrow m_{max}=5$.

代入 $k_z=k\sin\theta$ (θ为掠射角)

理想液体波导.

① 把水面海底都看作压力释放面
$p=0$.



ⅰ) 静像法

$$\psi(r,z)=-\frac{S_w}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{e^{ikR_{m1}}}{R_{m1}}-\frac{e^{ikR_{m2}}}{R_{m2}}-\frac{e^{ikR_{m3}}}{R_{m3}}+\frac{e^{ikR_{m4}}}{R_{m4}}\right]$$

$$R_{mn}=\sqrt{r^2+z_{mn}^2}$$

$$z_{m1}=2Dm-z_s+z$$

$$z_{m2}=2D(m+1)-z_s-z$$

$$z_{m3}=2Dm+z_s+z$$

$$z_{m4}=2D(m+1)+z_s-z.$$

ⅱ) 积分变换

$$\psi(k_r,z)=-S_w[g_w(k_r,z,z_s)+H_w(k_r,z)]$$

$$g_w(k_r,z,z_s)=-\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi ik_z}$$

$$H_w(k_r,z)=A^+(k_r)e^{ik_z z}+A^-(k_r)e^{-ik_z\cdot z}.$$

有 $z=0$ 与 $z=D$ 时 $\psi=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}A^+(k_r)+A^-(k_r)=\dfrac{e^{ik_z z_s}}{4\pi ik_z}\\ A^+(k_r)e^{ik_zD}+A^-(k_r)e^{-ik_zD}=\dfrac{e^{ik_z(D-z_s)}}{4\pi ik_z}.\end{cases}$$

$$\therefore\psi(k_r,z)=-\frac{S_w}{4\pi}\begin{cases}\dfrac{\sin k_z\cdot z\,\sin k_z(D-z_s)}{k_z\cdot\sin k_z\cdot D} & z<z_s\\ \dfrac{\sin k_z\cdot z_s\,\sin k_z(D-z)}{k_z\cdot\sin k_z\cdot D} & z>z_s\end{cases}$$

模式存在 $k_zD=m\pi$ 时为极点.

用 k_r 表示为 $\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{D}\right)^2}$

$\psi(k_r,z)\longrightarrow\psi(r,z)$ 用留数积分之法.

$$\psi(r,z)=-\frac{iS_w}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(k_{zm}z)\sin(k_{zm}z_s)H_0^{(1)}(k_{rm}r)$$

$\Rightarrow$ 从 z 方向看是正弦，r 方向看是 H_0 的渐近.

$$H_0^{(1)}(k_r)=\sqrt{\frac{2}{\pi k r}}e^{i(k\cdot r-\frac{\pi}{4})}\text{ 虚数衰减.}$$

由留数看出展开式中每一项都以 $\sin(k_{zm}z)$ 形式与深度为三角关系.

由于 $k_zD=m\pi\Rightarrow k_{z1}=\frac{\pi}{D}$.

z 方向 第一项为 $\sin(\frac{\pi}{D}\cdot z)$ $0<z<D$

第二项为 $\sin(\frac{2\pi}{D}\cdot z)$ $0<z<D$

第三项 ......

r 方向 主要取决于 $H_0^{(1)}(k_{rm}r)$

$$H_0^{(1)}k_r=\sqrt{\frac{2}{\pi k_{rm}r}}e^{i(k_{rm}\cdot r-\frac{\pi}{4})}$$

k_{rm} 为实数，可以看作水平传播模式.

k_{rm} 为虚数，是渐消模式.

模式干涉

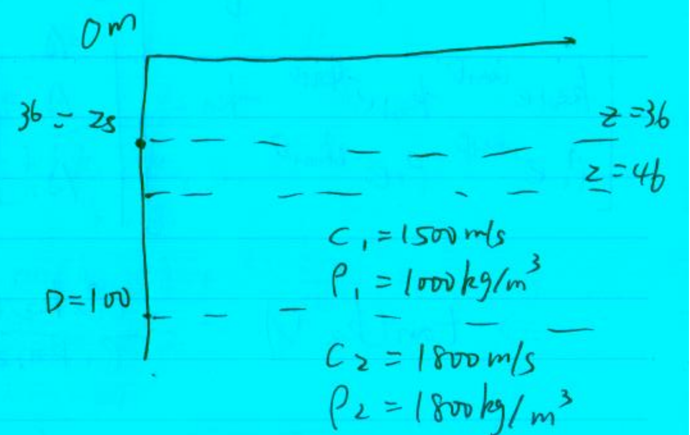
两个远离声源传播模式水平波数为 k_{rm} 与 k_{rn}.
幅度为 $A_m(z)$ 与 $A_n(z)$.

$$|\psi(r,z)| \approx \frac{1}{\sqrt{r}}\left|A_m e^{ik_{rm}r}+A_n e^{ik_{rn}r}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{A_m^2+A_n^2+2A_mA_n\cos[r(k_{rm}-k_{rn})]}$$

余弦定理，振荡周期为 $L=\frac{2\pi}{k_{rm}-k_{rn}}$

匹克利斯波导



求 $\psi_1(k_r,z) = S_w\frac{e^{ik_{z,1}|z-z_s|}}{4\pi i k_{z,1}} + A_1^+(k_r)e^{ik_{z,1}z}+A_1^-(k_r)e^{-ik_{z,1}z}$

式中 $k_{z,1}=\sqrt{k_1^2-k_r^2}$, $k_1=\frac{w}{c_1}$

在海底中，要满足无限远边界条件，向上传播分量为0.

$\therefore\ \psi_2(k_r,z)=A_2^+(k_r)e^{ik_{z,2}(z-D)}$

(式子中 k_r 都是相同的)

边界条件 ① 海面声压为0

$\therefore\ A_1^+(k_r)+A_1^-(k_r) = S_w\frac{ie^{ik_{z,1}z_s}}{4\pi k_{z,1}}$

② 质点位移连续 $\frac{d\psi}{dz}$

$$A_1^+(k_r)\cdot k_{z,1}e^{ik_{z,1}D} - k_{z,1}e^{ik_{z,1}D}A_1^-(k_r) - k_{z,2}A_2^+(k_r) = k_{z,1}S_w\frac{ie^{ik_{z,1}(D-z_s)}}{4\pi k_{z,1}}$$

③ 声压连续性 (由于 $p=\rho w^2\psi(w,r)$)

$$\therefore\ \rho_1 e^{ik_{z,1}D}A_1^+(k_r)+\rho_1 e^{-ik_{z,1}D}A_1^-(k_r)-\rho_2A_2^+(k_r) = \rho_1 S_w\frac{ie^{ik_{z,1}(D-z_s)}}{4\pi k_{z,1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_{z,1}e^{ik_{z,1}D} & -k_{z,1}e^{-ik_{z,1}D} & -k_{z,2} \\ \rho_1 e^{ik_{z,1}D} & \rho_1 e^{-ik_{z,1}D} & -\rho_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^+\\A_1^-\\A_2^+\end{bmatrix} = \frac{S\omega i}{4\pi k_{z,1}}\begin{bmatrix} e^{ik_{z,1}z_s} \\ k_{z,1}e^{ik_{z,1}(D-z_s)} \\ \rho_1 e^{ik_{z,1}(D-z_s)}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tan(k_{z,1}D) = -\frac{i\rho_2 k_{z,1}}{\rho_1 k_{z,2}}.$$

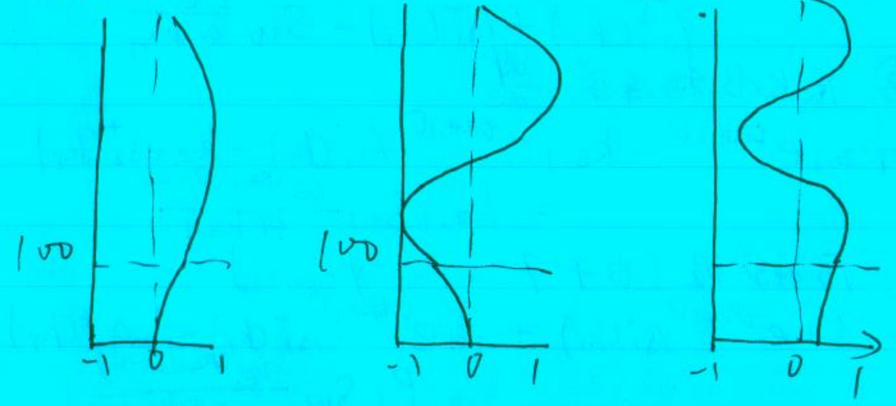
$k_{z,1}=\sqrt{k_1^2-k_r^2}$ $\qquad k_{z,2}=\sqrt{k_2^2-k_r^2}$

由于 $k_1=\frac{\omega}{c_1}$ $\quad k_2=\frac{\omega}{c_2}$ $\Rightarrow k_1>k_2$

☆只有 $|k_2|<|k_r|<|k_1|$ 才有解.

$\Rightarrow$ 留数法 $\psi(r,z) = -\frac{iS\omega}{2D}\sum_{n=1}^{M} a_m(k_{rm})\sin(k_{zm} z)\sin(k_{zm} z_s) H_0^{(1)}(k_{rm} r)$

同样看出竖直方向为类正弦波 $\sin(k_{zm} z)$.



$$H_0^{(1)}(k_{rm} r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{rm} r}}\, e^{i(k_{rm} r-\frac{\pi}{4})}$$

主要判断 $k_{zm}=k_{z,1}=\sqrt{k_1^2-k_{rm}^2}$ 的范围.

我们对 k_{rm} 感兴趣.

$\therefore\ 0<k_{z,m}<\sqrt{k_1^2-k_2^2}$

构造函数:

$$f(k_{z,1}) = \tan(k_{z,1}D) + \frac{i\rho_2 k_{z,1}}{\rho_1 k_{z,2}}$$

当 $k_{z,1}\in(\frac{\pi}{2D},\frac{\pi}{D})$ 有在极点.

$\lim_{k_{z,1}\to(\frac{\pi}{2D})^+} f(k_{z,1}) = -\infty$

$\lim_{k_{z,1}\to(\frac{\pi}{D})^+} f(k_{z,1}) > 0$

$\frac{\pi}{2}\to\pi$.

同理 $\lim_{k_{z,1}\to(\frac{3\pi}{2D})^+} f(k_{z,1}) = -\infty$

$\lim_{k_{z,1}\to(\frac{2\pi}{D})^+} f(k_{z,1}) \geq 0$.

同理 $(\frac{5\pi}{2D},\frac{3\pi}{D})$

对于 $z>D$ 的图像，模式越大，海底中垂直波数绝对值越小，因而渐消慢，低阶与理想波导相似，海底看作压力释放面，而高阶与 rigid (刚性面相似) 海底看作 位移为0 $\frac{d\psi}{dz}=0$.

$0<k_r<k_2$：连续谱，这时谱域声波辐射到海底中，声能将从波导泄漏。⟶ 谱的泄漏模式。

$k_2<k_r<k_1$：离散谱，此谱域声波在海水中垂直传播，在海底中按指数规律衰减，是对应无损模式（传播模态）。

$k_1<k_r$：消逝谱，这时海水与海底都在垂直方向按指数衰减。这里无极点。

若有靠近实轴的泄漏模式，该峰宽度与极点到实轴距离有关，因而环在对应的模式衰减比较小。由于两个模式（传播模式与泄漏模式波数上接近）所以模式干涉波长度比理想波导长，但是模式干涉由于存在泄漏模式，所以模式干涉随距离增大而减小，最终无损。

衰减因子 δ 为损耗角正切值，用 dB/λ 表示衰减系数，

即 $\alpha = -20\log\left|\frac{\psi(x+\lambda,t)}{\psi(x,t)}\right| = -20\log[e^{-\delta k\lambda}] = 40\pi\delta\log e$

$= 54.58\delta\ (dB/\lambda)$.

对比衰减系数 α.

$Loss = -20\log\frac{A}{A_0} \approx 8.686\,\alpha x$

$\therefore \alpha' \approx 8.686\,\alpha\ (dB/m)$.

声纳方程

$SE = SL - TL - N + DI - DT$

信号余量　声源级(dB)　传播损失(dB)　噪声　波束形成提高　检测阈

SE>0 即有效检测（即实际接收信号与实现检测所需最小信号级之差）

↓ DT 检测阈

CB/MVDR

$\frac{\lambda}{2}$ ⟶ 最大的阵列间隔.

CBF:

i) 一个信号源最优，不适合多个

$y = a(\theta)x + n \qquad n \sim CN(0, \sigma^2)$

$y \sim CN(a(\theta)x, \sigma^2 I)$

似然函数 $p(y,x,\theta) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|y-a(\theta)x\|^2}{\sigma^2}}$ 复高斯

求最大似然函数 $\Rightarrow \min\|y-a(\theta)x\|^2$

$\Rightarrow \max|a^H(\theta)y|$

MVDR:（可用于多个信号分析）

i) 求最大化信干比　（带通滤波）　$e^{-j\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}}$

$\max\frac{|W^Ha(\theta)|}{E[W^H(i+n)]^2}$　$W \leftrightarrow k$.　$\boxed{\text{多个信号 } a(\theta) \text{ 矩阵 } W \text{ 向量}}$

$\therefore \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_1 = w$

$\max\frac{|W^Ha(\theta)|^2}{W^HC_{i+n}W}$　$\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_2 + 2\pi = w$

$\therefore \frac{d}{\lambda}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = 1$ ↓ 最大取2.

$\max\frac{|W^Ha(\theta)|^2}{W^HC_yW} = \max\frac{1}{W^HC_yW}$ ⟶ 最小功率中最大值.

等价于 $\min W^HC_yW$ ~~功率最小~~

$W^Ha(\theta) = 1$ ⟶ 无偏性

使在期望方向上阵列输出功率最小，同时使信干噪比最大，提高多方分辨率与抑噪性能，使干扰贡献的功率最小，但[illegible]