第2章 波动传播理论

教师：朱江 博士

时间：2018年07月11日

邮箱：jiangzhu16@zju.edu.cn

地点：智海楼412

2.1波动方程

- 三大方程
  a. 质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

假设密度与空间无关

  b. 欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

  c. 绝热状态方程

$$p = p_0 + \rho' \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_S$$

线性近似，保留一阶项

- 速度的定义

$$c^2 \triangleq \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_S = \frac{p'}{\rho'}$$

$$p = p_0 + p' \qquad \rho = \rho_0 + \rho'$$

2.1波动方程

- 三大方程

  a. 质量守恒方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ 假设密度与空间无关 $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$

  b. 欧拉方程 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$ 线性近似，保留一阶项 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'$

  c. 绝热状态方程 $p = p_0 + \rho' \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_S + \cdots$ 线性近似，保留一阶项 $p' = \rho' c^2$

- 速度的定义

$$c^2 \triangleq \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_S = \frac{p'}{\rho'}$$

$$p = p_0 + p' \qquad \rho = \rho_0 + \rho'$$

2.1线性波动方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' \qquad p' = \rho' c^2$$

- 关于声压的波动方程（第一式对时间求导，结合第二式） $\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$
- 关于质点速度的波动方程（利用3式消掉ρ'）

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0$$

- 关于速度势（ϕ）的波动方程
- $\mathbf{v} = \nabla \phi \qquad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$
- 关于位移势（ψ）的波动方程

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{u} = \nabla \psi \qquad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

2.1线性波动方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'$$

$$p' = \rho' c^2$$

- 声压和速度的关系（证明见）
- 位势和声压的关系（证明见）

2.1线性波动方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' \qquad p' = \rho' c^2$$

- 声源表达式（ $f(\mathbf{r},t)$ 是体积注入函数）

$$\nabla^2 \psi - c^{-2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r},t)$$

- 一般边界条件是声压和位移（或速度）连续，位移势和速度势不连续

2.2亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi - c^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t)$$

- 对上式进行傅里叶变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 亥姆霍兹方程（其中 $k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})}$ ）

$$\left[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}, \omega) = f(\mathbf{r}, \omega).$$

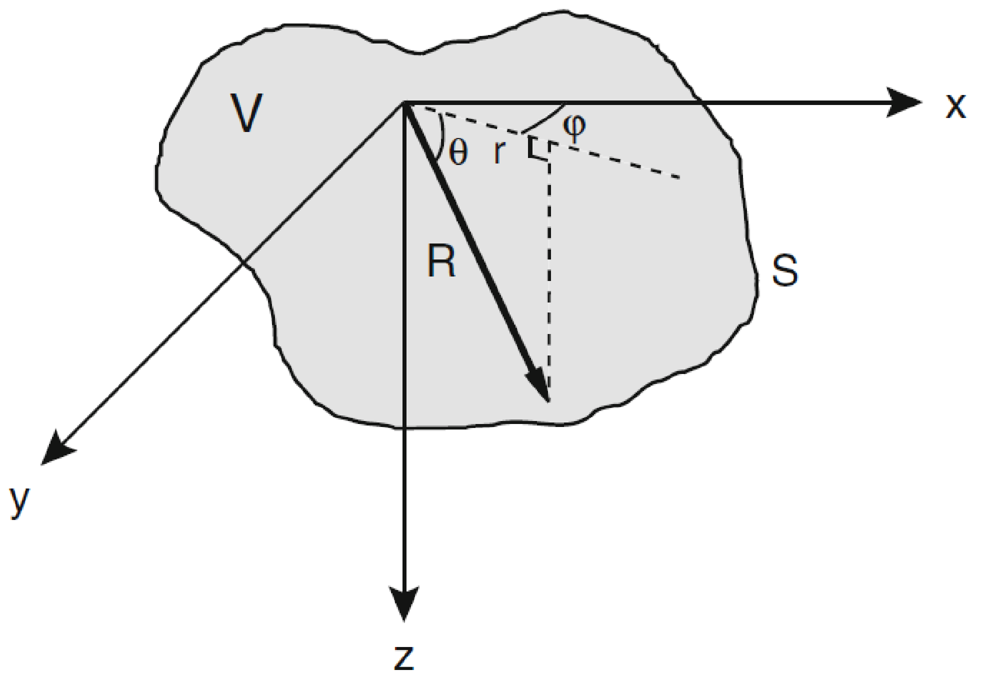
2.2无声源的亥姆霍兹方程

- 影响求解的因素
  a. 问题的维数
  b. 介质的波数变化
  c. 边界条件
  d. 声源-接收器分布
  e. 频率和带宽

$$\left[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

2.3均匀介质

- 均匀介质，波数为常数k，求解方程 $[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$
- 建立坐标系（显然，根据源的形状进行选择）求解



2.3.1坐标系（平面）

- 平面波，直角坐标系

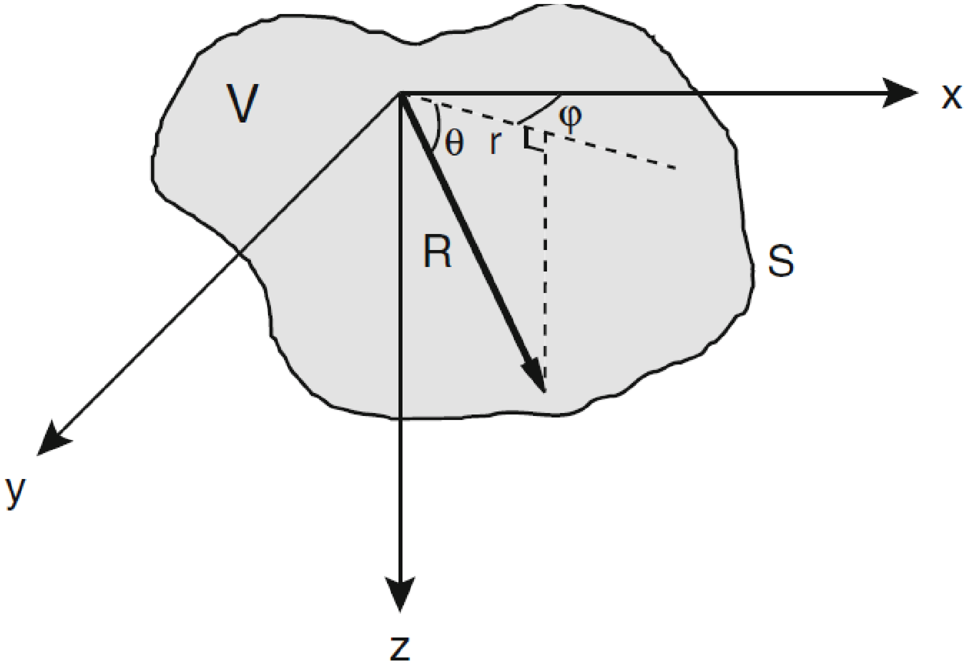
$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{cases}$$

- 无限、均匀线状声源产生的声场
- （其中源与z轴重合）

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



2.3.1坐标系（柱面）

- 无限、均匀线状声源产生的声场
- （其中源与z轴重合）

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- 解为

$$\psi(r) = \begin{cases} A\, J_0(kr) \\ B\, Y_0(kr) \end{cases}$$

- 汉克尔函数表示

$$\psi(r) = \begin{cases} CH_0^{(1)}(kr) = C\,[J_0(kr) + \mathrm{i}Y_0(kr)] \\ DH_0^{(2)}(kr) = D\,[J_0(kr) - \mathrm{i}Y_0(kr)] \end{cases}$$

渐近形式 →

$$H_0^{(1)}(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\pi/4)},$$ 发散的柱面波

$$H_0^{(2)}(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr-\pi/4)}.$$ 汇聚的柱面波

2.3.1坐标系（球面）

- 全向点源产生的声场

$$\left[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + k^2\right]\psi(r) = 0$$

- 解为

$$\psi(r) = \begin{cases} (A/r)\,\mathrm{e}^{ikr} \\ (B/r)\,\mathrm{e}^{-ikr} \end{cases}$$

发散的球面波

汇聚的球面波

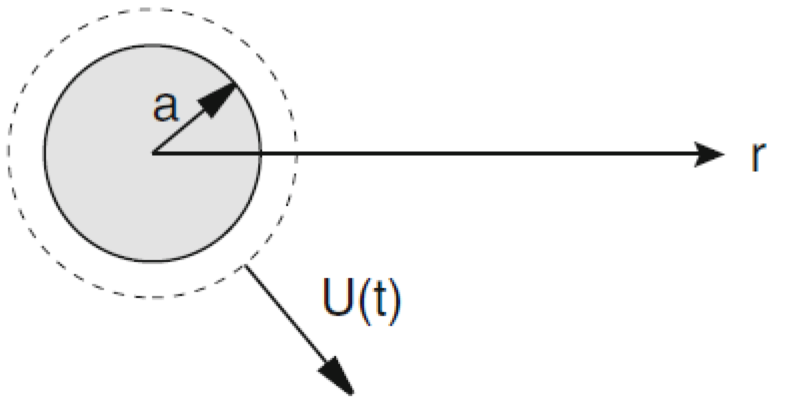
2.3.2无界介质中的声源

- 点源为半径为a的小球

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

- 条件：球面位移为 $u_r(t,a)=U(t)$ ，变换到频域为 $u_r(a)=U(\omega)$

- 求解位移势方程，要求 $\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a}=U(\omega)$



- 只有发散的球面波，则解为 $\psi(r)=A\frac{e^{ikr}}{r}$
- 位移场为

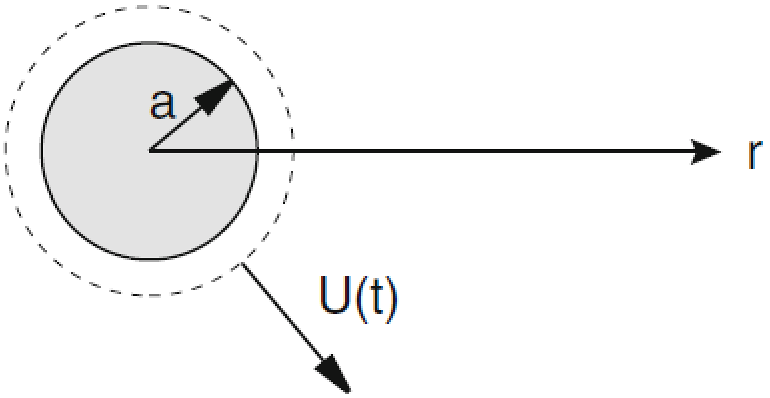
$$u_r(r) = A\,e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)$$

$$u_r(\omega,a) = A\,e^{ika}\,\frac{ika-1}{a^2} \simeq -\frac{A}{a^2} \Rightarrow A = -a^2\,U(\omega).$$

2.3.2无界介质中的声源

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

- 只有发散的球面波，则解为
- 位移场为 $\psi(r) = A\dfrac{e^{ikr}}{r}$



$$u_r(r) = A\,e^{ikr}\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$u_r(\omega, a) = A\,e^{ika}\,\frac{ika-1}{a^2} \simeq -\frac{A}{a^2} \quad\longrightarrow\quad A = -a^2\,U(\omega).$$

- 定义声源强度（声源在频率 ω 下产生的体积注入幅度）：

$$S_\omega \triangleq 4\pi a^2 U(\omega) \quad\longrightarrow\quad \psi(r) = -S_\omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

2.3.2无界介质中的声源（格林函数的引入）

- 非齐次亥姆霍兹方程

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

$$[\nabla^2 + k^2]\,g_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

- 其解称之为格林函数

$$g_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|.$$

- 因此，上述点源解（$\psi(r) = -S_\omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$）可以看作是如下方程的解：

$$[\nabla^2 + k^2]\,\psi(\omega,\mathbf{r}) = S_\omega\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

2.3.2格林函数的性质

- 互易原理

$$g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = g_\omega(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$$

- 数学解释？

2.3.3有界介质中的声源

- 介质体积为 V，界面为 S，边界条件 $\psi(S_0)$ 指定。声场由分布在 V 体积内的体积力产生，位移势满足的方程为

$$[\nabla^2+k^2]\psi(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})$$

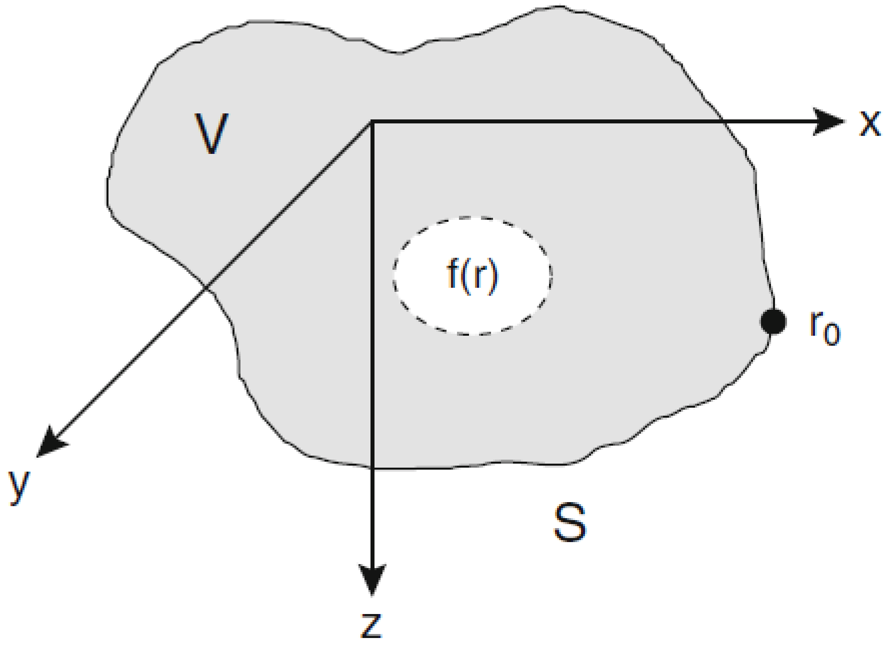
- 非齐次方程的解为齐次解和非齐次解叠加

$$G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=g_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+H_\omega(\mathbf{r})$$

非齐次解（特解）　　齐次解

- 齐次解对应的方程

$$[\nabla^2+k^2]H_\omega(\mathbf{r})=0$$



2.3.3有界介质中的声源

- 非齐次方程的解为齐次解和非齐次解叠加 $[\nabla^2 + k^2]\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$
- 总的格林函数为 $G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + H_\omega(\mathbf{r})$ $[\nabla^2 + k^2] H_\omega(\mathbf{r}) = 0$

非齐次解（特解） 齐次解

$$[\nabla^2 + k^2]\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \qquad [\nabla^2 + k^2] G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\nabla^2\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla^2 G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \psi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}).$$

- 交换 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}_0$ ， 并积分得

2.3.3有界介质中的声源

$$G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\nabla^2\psi(\mathbf{r})-\psi(\mathbf{r})\,\nabla^2 G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\psi(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f(\mathbf{r}).$$

$$\int_V\left[G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\nabla_0^2\,\psi(\mathbf{r}_0)-\psi(\mathbf{r}_0)\,\nabla_0^2\,G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right]\mathrm{d}V_0$$

$$=\int_V\psi(\mathbf{r}_0)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V_0+\int_V f(\mathbf{r}_0)\,G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V_0$$

$$\int \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int\nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V$$

$$\nabla\cdot\left(u\mathbf{v}\right)=\nabla u\cdot\mathbf{v}+u\nabla\cdot\mathbf{v}$$

- **格林定理：**

$$\psi(\mathbf{r})=\int_S\left[G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_0)}{\partial\mathbf{n}_0}-\psi(\mathbf{r}_0)\,\frac{\partial G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial\mathbf{n}_0}\right]\mathrm{d}S_0-\int_V f(\mathbf{r}_0)\,G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V_0,$$

此处的格林函数是广义格林函数，含有齐次解

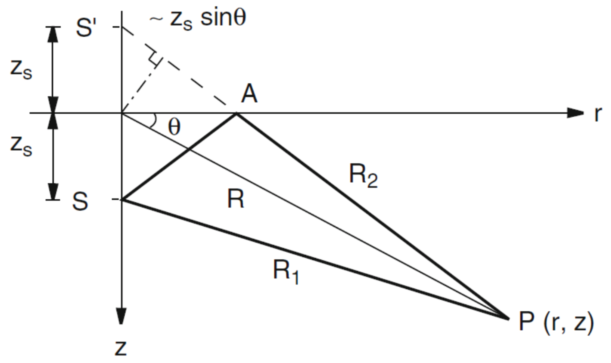
2.3.4液体半空间中的点源

- 齐次解和特解分别计算（方法1）
- 运用格林定理：
  a. 位势与声压的关系： $p(\mathbf{r})=\rho\omega^2\psi(\mathbf{r})$ 边界压强为零意味着位势为零，格林函数可以简化为

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_S G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_0)}{\partial\mathbf{n}_0}\,\mathrm{d}S_0 - \int_V f(\mathbf{r}_0)\,G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}V_0$$

  b. 对于单个点源，取 $f(\mathbf{r}_0) = S_\omega\,\delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_s)$ ，若广义格林函数满足 $G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\equiv 0$ $\psi(\mathbf{r}) = -S_\omega\,G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_s)$
  c. 显然，下面的广义格林函数满足

2.3.4液体半空间中的点源



- 齐次解和特解分别计算（方法1）
- 运用格林定理：

a. 对于单个点源，取 $f(\mathbf{r}_0) = S_\omega\, \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_s)$ ，若广义格林函数满足

$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv 0$ $\qquad$ $\psi(\mathbf{r}) = -S_\omega\, G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$

b. 显然，下面的广义格林函数满足

与镜像法计算结果一致！

$$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + H_\omega(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} - \frac{e^{ikR'}}{4\pi R'}$$

with

$$R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2},$$
$$R' = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z + z_s)^2}.$$

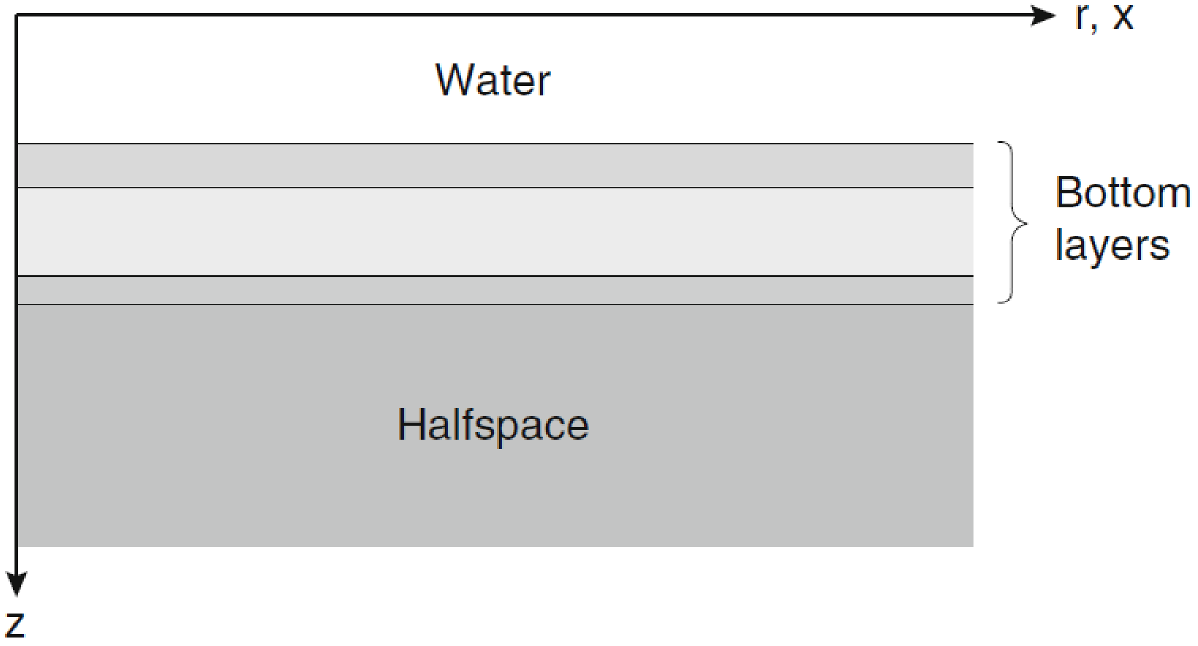
2.4分层介质和波导（积分变换法）

- 海洋环境
  a. 突变，海底处和海底内部不同地质层的界面处
  b. 海水中声速连续变化
- 简单的海洋环境离散模型

水平分层的波导，即与距离无关的波导

$$\left[\nabla^2 + k^2(z)\right]\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

$$B\left[\psi(\mathbf{r})\right]|_{z=z_n} = 0, \quad n = 1 \cdots N$$



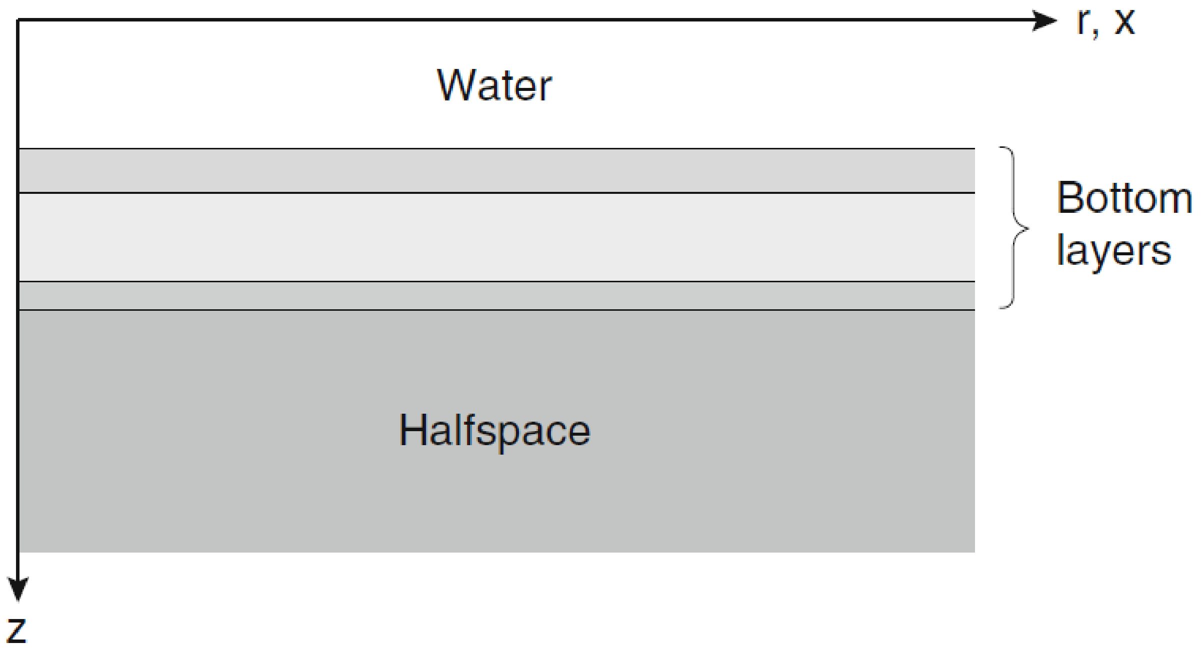
2.4分层介质和波导（平面传播问题）

- 无线长线状声源，与叠层平行
  a. 直角坐标系
  b. z轴与叠层垂直
  c. y轴与线源平行
  d. 声场与y无关
- 线源处于 $(x,z)=(0,z)$ 位置

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(z)\right]\psi(x,z)=S_\omega\,\delta(x)\,\delta(z-z_s)$$

此处表明波数与深度有关（环境参数不同）

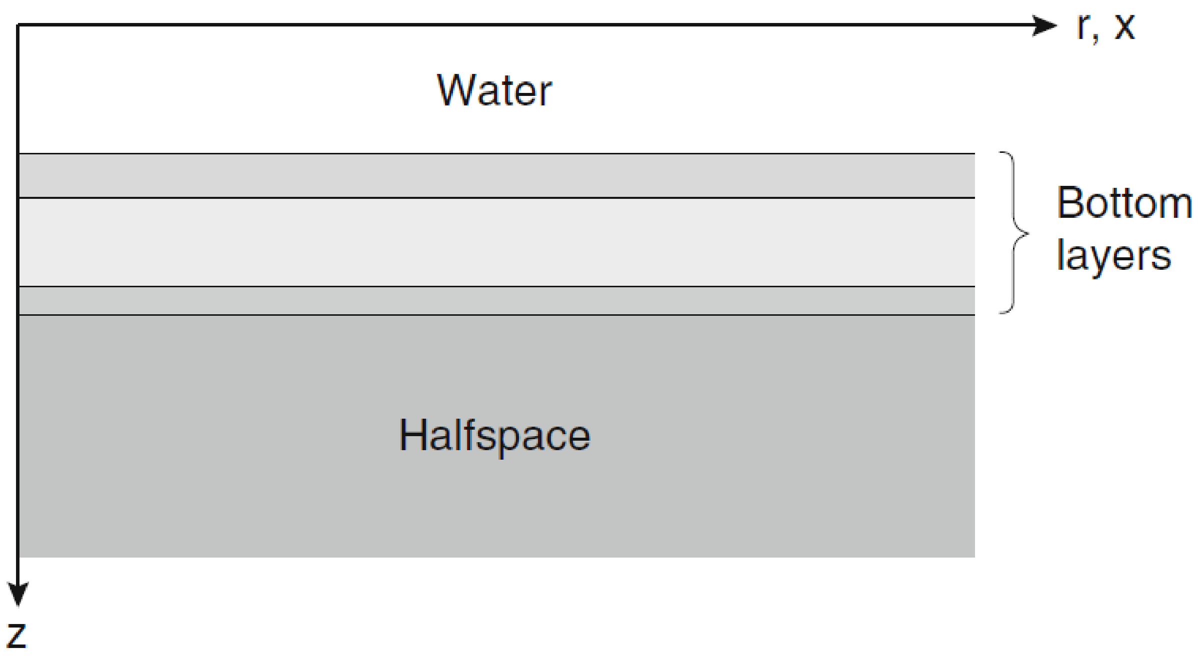
水平分层的波导，即与距离无关的波导



2.4分层介质和波导（平面传播问题）

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(z)\right]\psi(x,z)=S_\omega\,\delta(x)\,\delta(z-z_s)$$

水平分层的波导，即与距离无关的波导



- 应用傅里叶变换

$$f(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(k_x,z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\,\mathrm{d}k_x,$$

$$f(k_x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x}\,\mathrm{d}x$$

- 得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+(k^2-k_x^2)\right]\psi(k_x,z)=S_\omega\frac{\delta(z-z_s)}{2\pi}$$

2.4分层介质和波导（平面传播问题）

- 深度分离的波动方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + (k^2 - k_x^2)\right]\psi(k_x, z) = S_\omega \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi}$$

$$\left[\nabla^2 + k^2\right]\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

- 解为

左边与右边有什么不同点？

$$\psi(k_x, z) = -S_\omega G_\omega(k_x, z, z_s).$$

$$\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = S_\omega G_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$$

- 边界条件

$$B[\psi(k_x, z_n)] = 0.$$

2.4分层介质和波导（轴对称传播问题）

- 单个点源
  a. 柱坐标系
  b. z轴通过声源
  c. r轴与界面平行
- 汉克尔变换对

$$f(r,z)=\int_0^\infty f(k_r,z)\,J_0(k_r r)\,k_r\,\mathrm{d}k_r,$$

$$f(k_r,z)=\int_0^\infty f(r,z)\,J_0(k_r r)\,r\,\mathrm{d}r$$

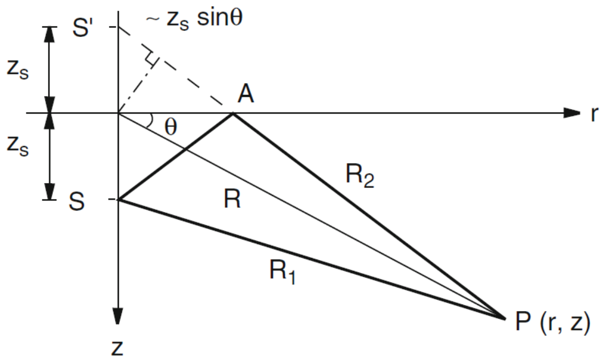
- 柱坐标系下的深度分离的波动方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+(k^2-k_r^2)\right]\psi(k_r,z)=S_\omega\frac{\delta(z-z_s)}{2\pi}$$

与直角坐标结果类似！

2.4例子（液体半空间中的点源，平静海面）

- 单个点源
  a. 柱坐标系
  b. z轴通过声源
  c. r轴与界面平行



$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_r^2)\right]\psi(k_r, z) = S_\omega \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi}$$

- 汉克尔变换对

$$f(r,z) = \int_0^\infty f(k_r, z)\, J_0(k_r r)\, k_r\, dk_r,$$

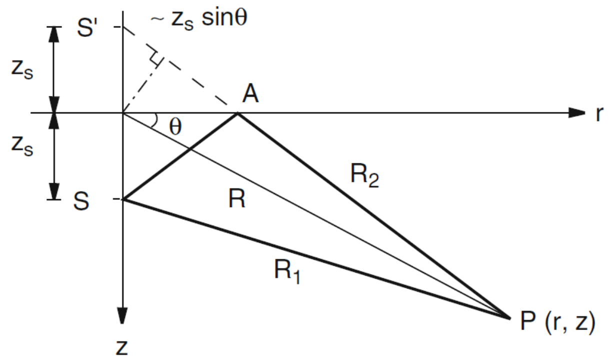
$$f(k_r,z) = \int_0^\infty f(r, z)\, J_0(k_r r)\, r\, dr$$

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_r^2}, & k_r \le k \\ i\sqrt{k_r^2 - k^2}, & k_r > k \end{cases}$$

- 齐次解为

$$H_\omega(k_r, z) = A^+(k_r)\, e^{ik_z z} + A^-(k_r)\, e^{-ik_z z}$$

2.4例子（液体半空间中的点源）



- 辐射条件

$$H_\omega(k_r, z) = \begin{cases} A^+(k_r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, & z \to +\infty \\ A^-(k_r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}, & z \to -\infty. \end{cases}$$

- 特解为

$$g_\omega(k_r, z, z_s) = A(k_r) \begin{cases} \mathrm{e}^{ik_z(z-z_s)}, & z \geq z_s \\ \mathrm{e}^{-ik_z(z-z_s)}, & z \leq z_s \end{cases}$$

$$= A(k_r)\,\mathrm{e}^{ik_z|z-z_s|}.$$

$$g_\omega(k_r, z, z_s) = -\frac{\mathrm{e}^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi\mathrm{i}k_z}$$

$$g_\omega(r, z, z_s) = \frac{i}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{ik_z|z-z_s|}}{k_z} J_0(k_r r)\, k_r\, \mathrm{d}k_r$$

- 根据如下的波动方程求得特解系数 $A(k_r)$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + (k^2 - k_x^2)\right] g_\omega(k_x, z, z_s) = -\frac{\delta(z - z_s)}{2\pi}$$

$$\left[\frac{dg_\omega(k_r, z)}{\mathrm{d}z}\right]_{z_s-\epsilon}^{z_s+\epsilon} + O(\epsilon) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$A(k_r) = -\frac{1}{4\pi\mathrm{i}k_z}$$

2.4例子（液体半空间中的点源）

- 索末菲-威尔积分

$$g_\omega(r,z,z_s)=\frac{i}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{k_z}J_0(k_r r)\,k_r\,dk_r$$

$$H_0^{(1)}(kr)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(kr-\pi/4)},$$

$$H_0^{(2)}(kr)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i(kr-\pi/4)}.$$

- 点源声场分解
  a. 水平方向（r）：柱面波
  b. 竖直方向（z）： $k_r<k$ 平面波， $k_r>k$ 指数规律衰减

2.4例子（液体半空间中的点源）

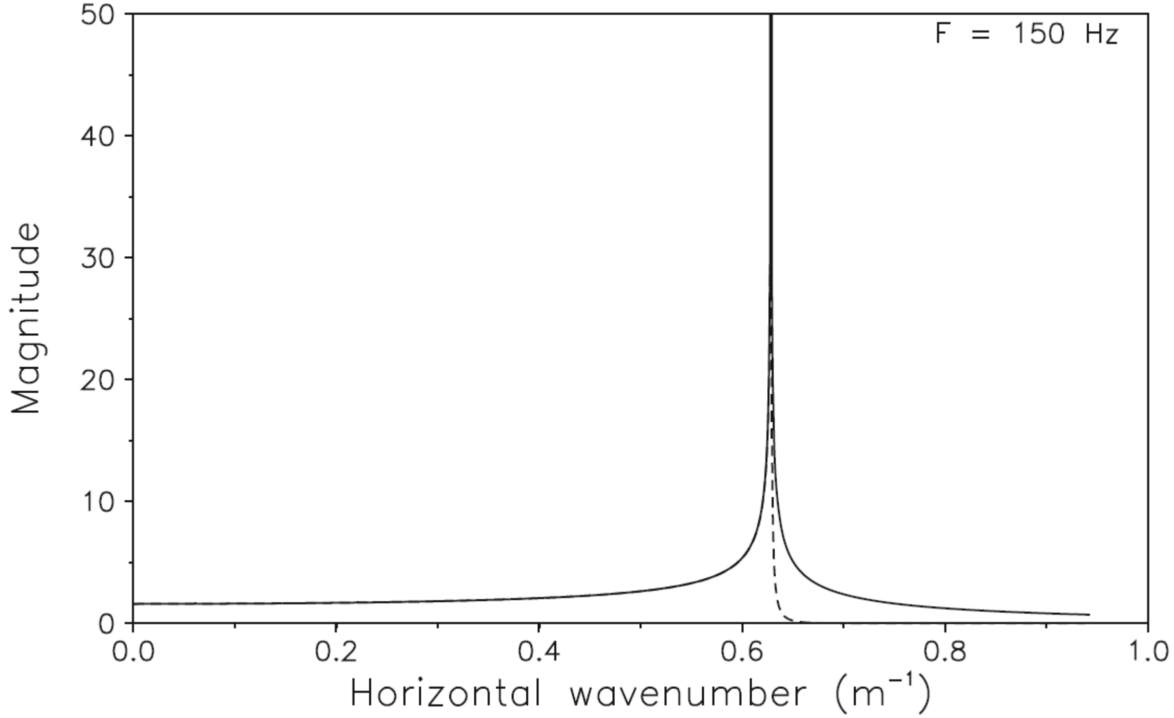
- 与深度有关的点源格林函数

$$g_\omega(k_r, z, z_s) = -\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi i k_z}$$

自由空间的格林函数

- 特点

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = 0.628$$



- 辐射谱和渐消谱

2.4例子（液体半空间中的点源）

- 波动方程求解
- 边界条件

$$\psi(k_r, 0) \equiv 0$$

$$\psi(k_r, 0) = -S_\omega \left[g_\omega(k_r, 0, z_s) + H_\omega(k_r, 0) \right] = S_\omega \left[\frac{e^{ik_z z_s}}{4\pi i k_z} - A^+(k_r) \right] = 0,$$

- 解为

$$\psi(k_r, z) = S_\omega \left[\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi i k_z} - \frac{e^{ik_z(z+z_s)}}{4\pi i k_z} \right]$$

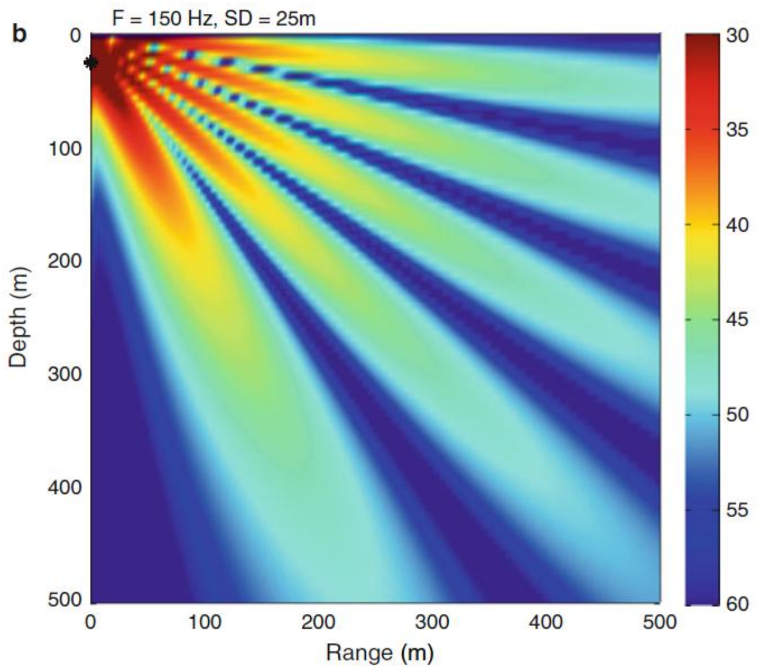
- 极小极大值

$$k_z = \frac{(m-1)\pi}{z_s}, \qquad m = 1, 2, \cdots \qquad\qquad k_z = \frac{(2m-1)\pi}{2z_s}. \qquad m = 1, 2, \cdots$$

2.4例子（液体半空间中的点源）

- 波动方程解

$$\psi(k_r, z) = S_\omega \left[\frac{e^{ik_z|z-z_s|}}{4\pi i k_z} - \frac{e^{ik_z(z+z_s)}}{4\pi i k_z} \right]$$



此方法与第一章的方法产生的结果是否相同？

2.4.3反射与透射

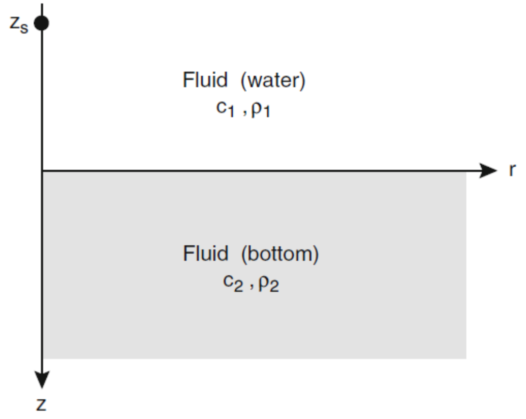
- 声场单独与海底的相互作用
- 上半空间（有点源）齐次解

$$H_{\omega,1}(k_r,z) = A_1^-(k_r)\,e^{-ik_{z,1}z}$$

- 下半空间齐次解

$$H_{\omega,2}(k_r,z) = A_2^+(k_r)\,e^{ik_{z,2}z},$$

- 上半空间的场由齐次解和特解构成
- 垂直位移的连续性和声压的连续性



$$\frac{\partial \psi_1(k_r,z)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2(k_r,z)}{\partial z}, \qquad z=0.$$

$$\rho_1\,\psi_1(k_r,z) = \rho_2\,\psi_2(k_r,z), \qquad z=0.$$

2.4.3反射与透射

- 声场单独与海底的相互作用
- 上半空间（有点源）齐次解

$$H_{\omega,1}(k_r,z) = A_1^-(k_r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z,1}z}$$

- 下半空间齐次解

并不是真正意义上的平面波，
只是分解成平面波

$$H_{\omega,2}(k_r,z) = A_2^+(k_r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{z,2}z},$$

- 上半空间的场由齐次解和特解构成
- 垂直位移的连续性和声压的连续性

$$\frac{\partial\psi_1(k_r,z)}{\partial z} = \frac{\partial\psi_2(k_r,z)}{\partial z}, \qquad z=0.$$

$$\rho_1\,\psi_1(k_r,z) = \rho_2\,\psi_2(k_r,z), \qquad z=0.$$

$$A_1^- = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}\, g_{\omega,1}(k_r,0,z_s),$$

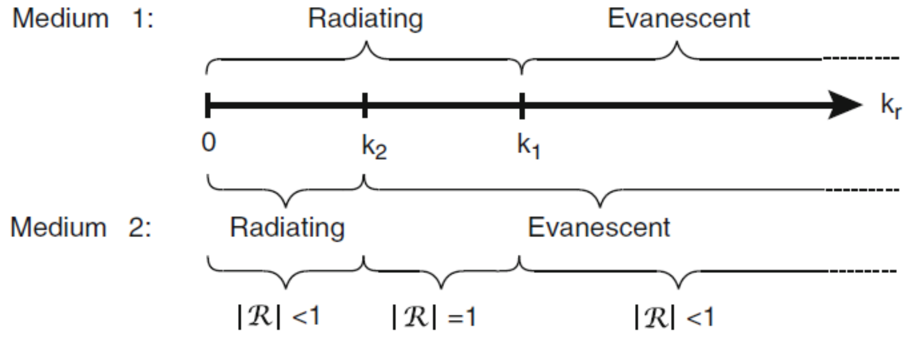
$$A_2^+ = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}\, g_{\omega,1}(k_r,0,z_s).$$

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}},$$

$$\mathcal{T} = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}.$$

2.4.3反射与透射（硬海底）

- 声场单独与海底的相互作用



$$A_1^- = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}} g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s),$$

$$A_2^+ = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}} g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s).$$

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}},$$

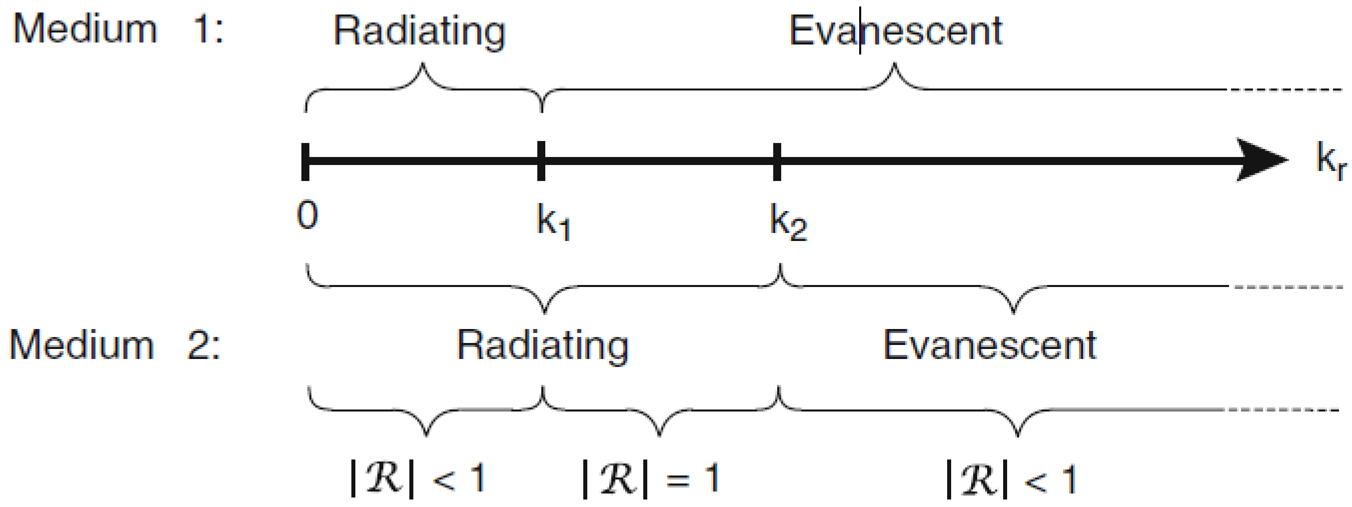
$$\mathcal{T} = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}.$$

2.4.3反射与透射（软海底）

- 声场单独与海底的相互作用

$$A_1^- = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}} g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s),$$

$$A_2^+ = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}} g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s).$$



$$\mathcal{R} = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}},$$

$$\mathcal{T} = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}.$$

2.4.3点源声场

- 波数域解

$$\psi(k_r, z) = \begin{cases} -S_\omega \left[g_{\omega,1}(k_r, z, z_s) + H_{\omega,1}(k_r, z) \right], & z < 0 \\ -S_\omega \, H_{\omega,2}(k_r, z), & z > 0, \end{cases}$$

$$H_{\omega,1}(k_r, z) = A_1^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z,1}z} \qquad H_{\omega,2}(k_r, z) = A_2^+(k_r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{z,2}z}, \qquad g_\omega(k_r, z, z_s) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z-z_s|}}{4\pi \mathrm{i}k_z}.$$

$$A_1^- = \frac{\rho_2 k_{z,1} - \rho_1 k_{z,2}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}\, g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s),$$

$$A_2^+ = \frac{2\rho_1 k_{z,1}}{\rho_2 k_{z,1} + \rho_1 k_{z,2}}\, g_{\omega,1}(k_r, 0, z_s).$$

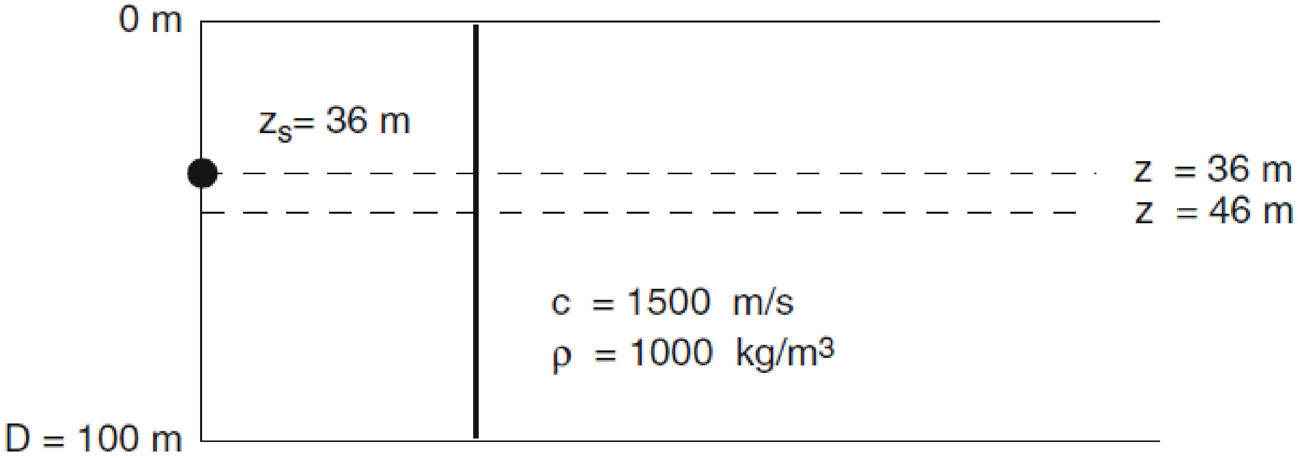
- 波数积分

$$\psi(r, z) = \int_0^\infty A_1^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z,1}z} J_0(k_r r)\, k_r \, \mathrm{d}k_r$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty A_1^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z,1}z} H_0^{(1)}(k_r r)\, k_r \, \mathrm{d}k_r.$$

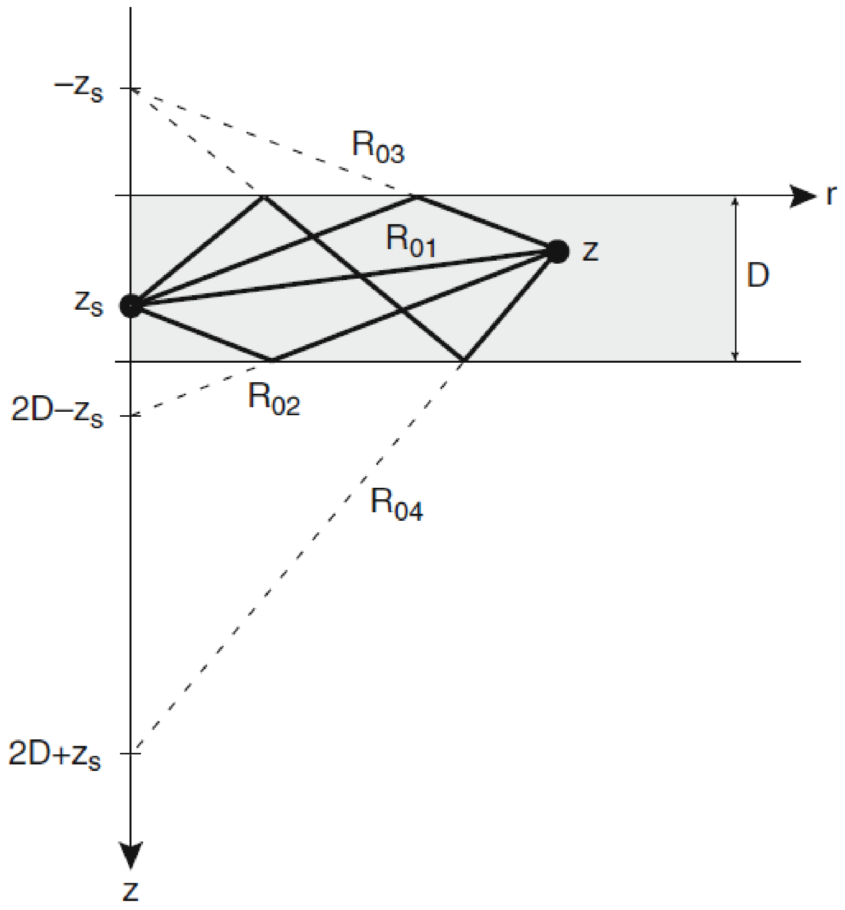
2.4.4理想液体波导

- 模型（压力释放海面和海底）
- 镜像法
- 积分变换法



2.4.4理想液体波导

- 镜像法



2.4.4理想液体波导

- 积分变换法

$$\psi(r,z) = \int_0^{\infty} \psi(k_r, z)\, J_0(k_r r)\, k_r\, \mathrm{d}k_r$$

$$\psi(k_r, z) = -S_\omega \left[g_\omega(k_r, z, z_s) + H_\omega(k_r, z) \right].$$

$$g_\omega(k_r, z, z_s) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z-z_s|}}{4\pi \mathrm{i}k_z},$$

$$r, z) = A^+(k_r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} + A^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}.$$

$$g_\omega(k_r, z, z_s) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z-z_s|}}{4\pi \mathrm{i}k_z},$$

$$H_\omega(k_r, z) = A^+(k_r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} + A^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}.$$

- 边界条件（上底和下底压力为0）

$$A^+(k_r) + A^-(k_r) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z_s}}{4\pi \mathrm{i}k_z},$$

$$A^+(k_r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z D} + A^-(k_r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z D} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(D-z_s)}}{4\pi \mathrm{i}k_z}.$$

2.4.4理想液体波导

- 积分变换法
- 边界条件（上底和下底压力为0）

$$A^+(k_r) + A^-(k_r) = \frac{e^{ik_z z_s}}{4\pi i k_z},$$

$$A^+(k_r)\, e^{ik_z D} + A^-(k_r)\, e^{-ik_z D} = \frac{e^{ik_z (D - z_s)}}{4\pi i k_z}.$$

$$\psi(k_r, z) = -\frac{S_\omega}{4\pi} \begin{cases} \dfrac{\sin k_z z \, \sin k_z (D - z_s)}{k_z \, \sin k_z D}, & z < z_s \\ \dfrac{\sin k_z z_s \, \sin k_z (D - z)}{k_z \, \sin k_z D}, & z > z_s. \end{cases}$$

2.4.4理想液体波导

- 积分变换法

$$\psi(k_r, z) = -\frac{S_\omega}{2\pi}\begin{cases}\dfrac{\sin k_z z \sin k_z(D - z_s)}{k_z \sin k_z D}, & z < z_s \\ \dfrac{\sin k_z z_s \sin k_z(D - z)}{k_z \sin k_z D}, & z > z_s\end{cases}$$

- 奇点

$$k_z D = m\pi, \qquad m = 1, 2 \ldots,$$

$$k_r = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{D}\right)^2}, \qquad m = 1, 2 \ldots$$

- 积分变换

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(k_r, z)\, H_0^{(1)}(k_r r)\, k_r\, dk_r.$$

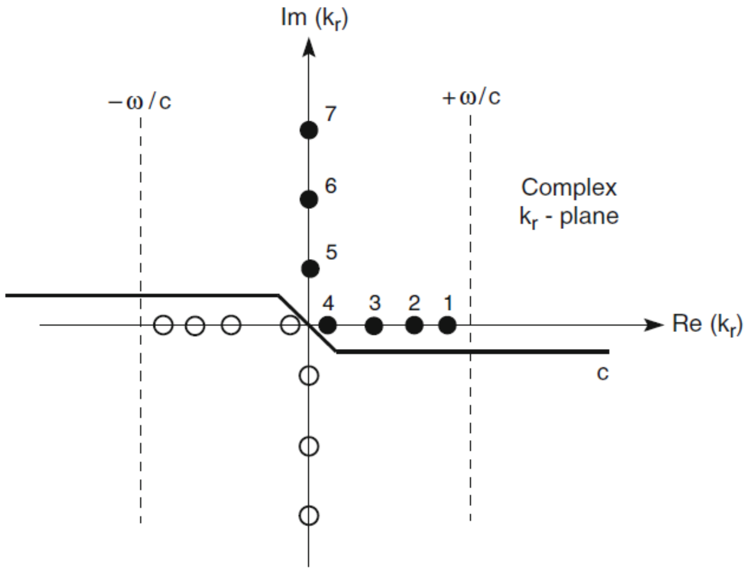


Fig. 2.18 Singularities of the depth-dependent Green's function for an ideal waveguide

2.4.4理想液体波导

- 积分变换法

$$\psi(k_r, z) = -\frac{S_\omega}{2\pi}\begin{cases}\dfrac{\sin k_z z \sin k_z(D-z_s)}{k_z \sin k_z D}, & z < z_s\\ \dfrac{\sin k_z z_s \sin k_z(D-z)}{k_z \sin k_z D}, & z > z_s\end{cases}$$

- 奇点

$$k_z D = m\pi, \qquad m = 1, 2 \ldots,$$

$$k_r = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{D}\right)^2}, \qquad m = 1, 2 \ldots$$

- 积分变换

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(k_r, z)\, H_0^{(1)}(k_r r)\, k_r\, dk_r .$$

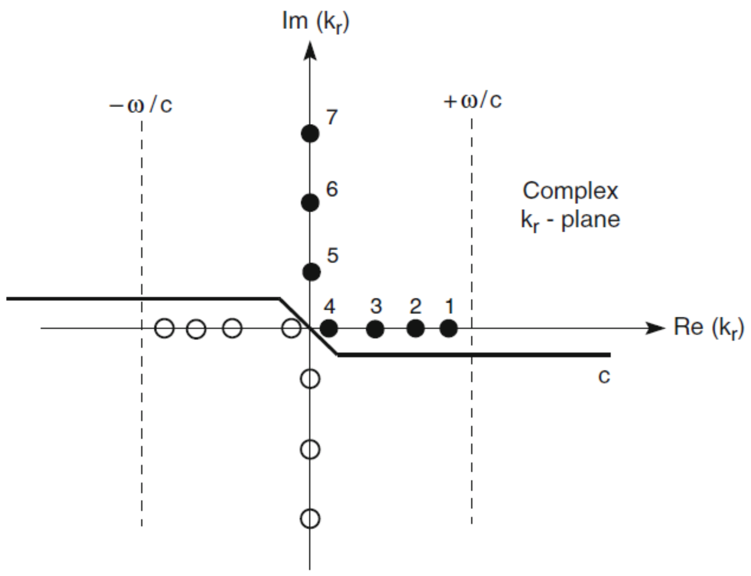


Fig. 2.18 Singularities of the depth-dependent Green's function for an ideal waveguide

留数定理

$$\psi(r, z) = -\frac{iS_\omega}{2D}\sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{zm} z)\sin(k_{zm} z_s)\, H_0^{(1)}(k_{rm} r)$$

2.4.4理想液体波导

- 简正波

$$\psi(r,z) = -\frac{iS_\omega}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(k_{zm}z)\sin(k_{zm}z_s)\,H_0^{(1)}(k_{rm}r)$$

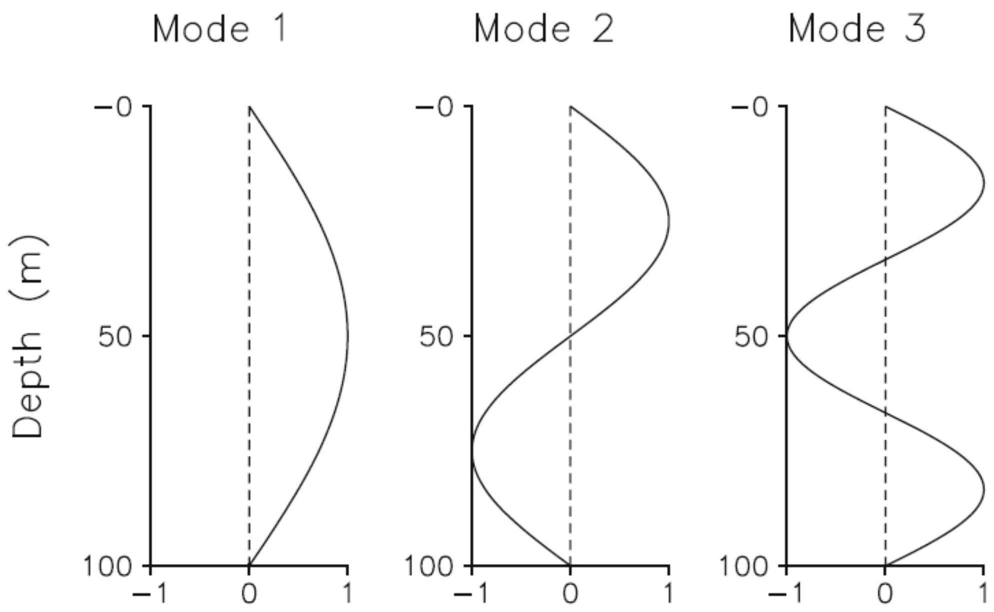


Fig. 2.19 Depth dependence of the first 3 normal modes in ideal waveguide at 20 Hz

Propagating modes: k_{rm} real $\quad m < \frac{kD}{\pi}$,

Evanescent modes: k_{rm} imaginary $\quad m > \frac{kD}{\pi}$.

2.4.4理想液体波导

- 波导中的声场

$$\psi(r,z) = -\frac{\mathrm{i}S_\omega}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(k_{zm}z)\sin(k_{zm}z_s)\,H_0^{(1)}(k_{rm}r)$$

- 模式干涉

$$\begin{aligned}|\psi(r,z)| &\simeq r^{-1/2}\left|A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{rm}r} + A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{rn}r}\right| \\ &= r^{-1/2}\sqrt{A_m^2 + A_n^2 + 2A_mA_n\cos\left[r\,(k_{rm}-k_{rn})\right]}.\end{aligned}$$

- 振荡周期

$$L = \frac{2\pi}{k_{rm}-k_{rn}},$$

2.4.5匹克利斯（Pekeris）波导

- 问题求解

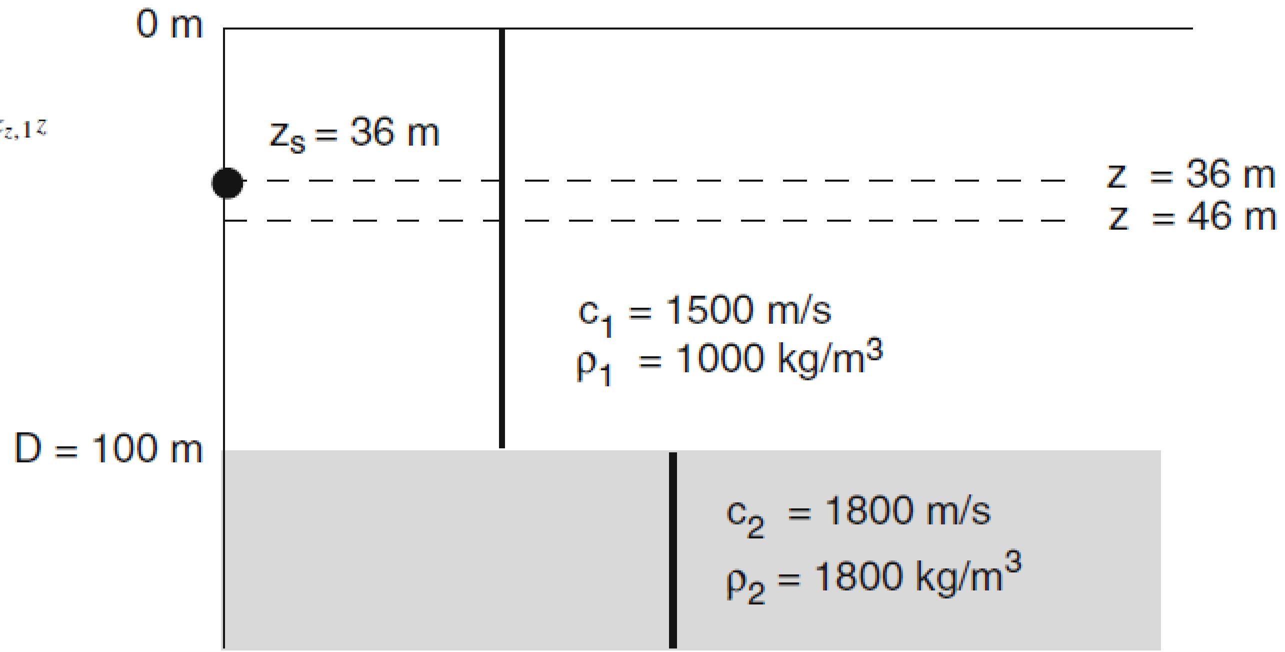
  a. 海水中

$$\psi_1(k_r,z) = S_\omega \frac{e^{ik_{z,1}|z-z_s|}}{4\pi i k_{z,1}} + A_1^+(k_r)\, e^{ik_{z,1}z} + A_1^-(k_r)\, e^{-ik_{z,1}z}$$

  b. 海底中辐射条件

$$\psi_2(k_r,z) = A_2^+(k_r)\, e^{ik_{z,2}(z-D)}$$

- 边界条件



2.4.5匹克利斯（Pekeris）波导

- 问题求解
  a. 海水中

$$\psi_1(k_r,z) = S_\omega \frac{e^{ik_{z,1}|z-z_s|}}{4\pi i k_{z,1}} + A_1^+(k_r)\, e^{ik_{z,1}z} + A_1^-(k_r)\, e^{-ik_{z,1}z}$$

  b. 海底中辐射条件

$$\psi_2(k_r,z) = A_2^+(k_r)\, e^{ik_{z,2}(z-D)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_{z,1}\, e^{ik_{z,1}D} & -k_{z,1}\, e^{-ik_{z,1}D} & -k_{z,2} \\ \rho_1\, e^{ik_{z,1}D} & \rho_1\, e^{-ik_{z,1}D} & -\rho_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \\ A_2^+ \end{Bmatrix} = \frac{iS_\omega}{4\pi k_{z,1}} \begin{Bmatrix} e^{ik_{z,1}z_s} \\ k_{z,1}\, e^{ik_{z,1}(D-z_s)} \\ \rho_1\, e^{ik_{z,1}(D-z_s)} \end{Bmatrix}.$$

- 边界条件
- 极点（poles）：右式行列式为零的点

$$\tan(k_{z,1}D) = -\frac{i\rho_2 k_{z,1}}{\rho_1 k_{z,2}}.$$

2.4.5匹克利斯（Pekeris）波导

- 极点（poles）：右式行列式为零的点

$$\tan(k_{z,1}D) = -\frac{\mathrm{i}\rho_2 k_{z,2}}{\rho_1 k_{z,2}}.$$

- 上式存在实数解的条件

$$|k_2| < |k_r| < |k_1|.$$

- 近似模式解

$$\psi(r,z) \simeq -\frac{\mathrm{i}S_\omega}{2D}\sum_{m=1}^{M} a_m(k_{rm})\sin(k_{zm}z)\sin(k_{zm}z_s)\,H_0^{(1)}(k_{rm}r)$$

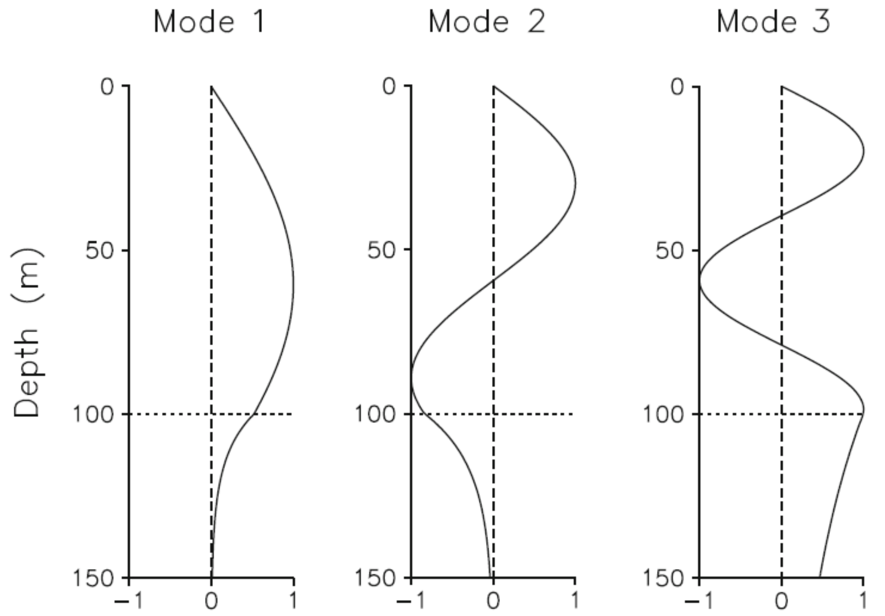


Fig. 2.27 Depth dependence of acoustic pressure for the 3 normal modes in the Pekeris waveguide at 35 Hz

2.4.5衰减

- 衰减形式

$$\psi(x,t) = A\,e^{-i(\omega t - kx) - \alpha x}, \qquad \alpha > 0.$$

$$\psi(x,t) = A\,e^{-i[\omega t - k(1+i\delta)x]}$$

$$\alpha = -20\log\left|\frac{\psi(x+\lambda,t)}{\psi(x,t)}\right| = -20\log\left[e^{-\delta k\lambda}\right] = 40\pi\,\delta\log e \simeq 54.58\,\delta.$$

作业

- 2.2,2.4,2.6,2.7,2.8,2.9,2.10,2.11